CENGAGE Learning

Probabilidad y estadística

para ingeniería y ciencias

Octava edición

Jay L. Devore

OCTAVA EDICIÓN

Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias

JAY DEVORE

California Polytechnic State University, San Luis Obispo

Traducción:
Patricia Solorio Gómez
Traductora profesional

Revisión técnica:
Ana Elizabeth García Hernández
Universidad LaSalle Morelia

CENGAGE Learning™

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning™

Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias, Octava edición
Jay L. Devore

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director de producto y desarrollo Latinoamérica:
Daniel Oti Yvonnet

Director editorial y de producción Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Editor:
Sergio R. Cervantes González

Coordinadora de producción editorial:
Abril Vega Orozco

Editor de producción:
Timoteo Eliosa García

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Rokusek Design

Composición tipográfica:
Imagen Editorial

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 15 14 13 12

© D.R. 2012 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.,
una Compañía de Cengage Learning, Inc.
Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.
Cengage Learning™ es una marca registrada
usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en Internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27, de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial.

Traducido del libro:
Probability and Statistics for Engineering and Sciences, Eighth Edition
Jay L. Devore
Publicado en inglés por Brooks/Cole, Cengage Learning, © 2010
ISBN-13: 978-0-538-73352-6
ISBN-10: 0-538-73352-7

Datos para catalogación bibliográfica:
Devore, Jay L.
Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias, Octava edición
ISBN: 978-607-481-619-8

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Contenido

1 Generalidades y estadística descriptiva

Introducción 1
1.1 Poblaciones, muestras y procesos 2
1.2 Métodos pictóricos y tabulares en la estadística descriptiva 12
1.3 Medidas de ubicación 28
1.4 Medidas de variabilidad 35
Ejercicios suplementarios 46
Bibliografía 49

2 Probabilidad

Introducción 50
2.1 Espacios muestrales y eventos 51
2.2 Axiomas, interpretaciones, y propiedades de la probabilidad 55
2.3 Técnicas de conteo 64
2.4 Probabilidad condicional 73
2.5 Independencia 83
Ejercicios suplementarios 88
Bibliografía 91

3 Variables aleatorias discretas y distribuciones de probabilidad

Introducción 92
3.1 Variables aleatorias 93
3.2 Distribuciones de probabilidad para variables aleatorias discretas 96
3.3 Valores esperados 106
3.4 Distribución de probabilidad binomial 114
3.5 Distribuciones hipergeométrica y binomial negativa 122
3.6 Distribución de probabilidad de Poisson 128
Ejercicios suplementarios 133
Bibliografía 136

4 Variables aleatorias continuas y distribuciones de probabilidad

Introducción 137
4.1 Funciones de densidad de probabilidad 138
4.2 Funciones de distribución acumulativa y valores esperados 143
4.3 Distribución normal 152
4.4 Distribuciones exponencial y gamma 165
4.5 Otras distribuciones continuas 171
4.6 Gráficas de probabilidad 178
Ejercicios suplementarios 188
Bibliografía 192

5 Distribuciones de probabilidad conjunta y muestras aleatorias

Introducción 193
5.1 Variables aleatorias conjuntamente distribuidas 194
5.2 Valores esperados, covarianza y correlación 206
5.3 Estadísticos y sus distribuciones 212
5.4 Distribución de la media muestral 223
5.5 Distribución de una combinación lineal 230
Ejercicios suplementarios 235
Bibliografía 238

6 Estimación puntual

Introducción 239
6.1 Algunos conceptos generales de estimación puntual 240
6.2 Métodos de estimación puntual 255
Ejercicios suplementarios 265
Bibliografía 266

7 Intervalos estadísticos basados en una sola muestra

Introducción 267
7.1 Propiedades básicas de los intervalos de confianza 268
7.2 Intervalos de confianza de muestra grande para una media y proporción de población 276

7.3 Intervalos basados en una distribución de población normal 285
7.4 Intervalos de confianza para la varianza y desviación estándar de una población normal 294
Ejercicios suplementarios 297
Bibliografía 299

8 Pruebas de hipótesis basadas en una sola muestra

Introducción 300
8.1 Hipótesis y procedimientos de prueba 301
8.2 Pruebas sobre una media de población 310
8.3 Pruebas relacionadas con una proporción de población 323
8.4 Valores *P* 328
8.5 Algunos comentarios sobre la selección de una prueba 339
Ejercicios suplementarios 342
Bibliografía 344

9 Inferencias basadas en dos muestras

Introducción 345
9.1 Pruebas *z* e intervalos de confianza para una diferencia entre dos medias de población 346
9.2 Prueba *t* con dos muestras e intervalo de confianza 357
9.3 Análisis de datos pareados 365
9.4 Inferencias sobre una diferencia entre proporciones de población 375
9.5 Inferencias sobre dos varianzas de población 382
Ejercicios suplementarios 386
Bibliografía 390

10 Análisis de la varianza

Introducción 391
10.1 ANOVA unifactorial 392
10.2 Comparaciones múltiples en ANOVA 402
10.3 Más sobre ANOVA unifactorial 408
Ejercicios suplementarios 417
Bibliografía 418

11 Análisis multifactorial de la varianza

Introducción 419
11.1 ANOVA bifactorial con $K_{ij} = 1$ 420
11.2 ANOVA bifactorial con $K_{ij} > 1$ 433
11.3 ANOVA con tres factores 442
11.4 Experimentos 2^p factoriales 451
Ejercicios suplementarios 464
Bibliografía 467

12 Regresión lineal simple y correlación

Introducción 468
12.1 Modelo de regresión lineal simple 469
12.2 Estimación de parámetros de modelo 477
12.3 Inferencias sobre el parámetro de pendiente β_1 490
12.4 Inferencias sobre $\mu_{Y \cdot x^*}$ y predicción de valores Y futuros 499
12.5 Correlación 508
Ejercicios suplementarios 518
Bibliografía 522

13 Regresión múltiple y no lineal

Introducción 523
13.1 Aptitud y verificación del modelo 524
13.2 Regresión con variables transformadas 531
13.3 Regresión polinomial 543
13.4 Análisis de regresión múltiple 553
13.5 Otros problemas en regresión múltiple 574
Ejercicios suplementarios 588
Bibliografía 593

14 Pruebas de bondad de ajuste y análisis de datos categóricos

Introducción 594
14.1 Pruebas de bondad de ajuste cuando las probabilidades categóricas se satisfacen por completo 595

14.2 Pruebas de bondad de ajuste para hipótesis compuestas 602
14.3 Tablas de contingencia mutuas (o bidireccionales) 613
Ejercicios suplementarios 621
Bibliografía 624

15 Procedimientos de distribución libre

Introducción 625
15.1 La prueba Wilcoxon de rango con signo 626
15.2 Prueba Wilcoxon de suma de rangos 634
15.3 Intervalos de confianza de distribución libre 640
15.4 ANOVA de distribución libre 645
Ejercicios suplementarios 649
Bibliografía 650

16 Métodos de control de calidad

Introducción 651
16.1 Comentarios generales sobre gráficas de control 652
16.2 Gráficas de control para ubicación de proceso 654
16.3 Gráficas de control para variación de proceso 663
16.4 Gráficas de control para atributos 668
16.5 Procedimientos CUSUM 672
16.6 Muestreo de aceptación 680
Ejercicios suplementarios 686
Bibliografía 687

Tablas de apéndice

A.1 Distribución binomial acumulada A-2
A.2 Distribución acumulada de Poisson A-4
A.3 Áreas de la curva normal estándar A-6
A.4 La función gamma incompleta A-8
A.5 Valores críticos para distribuciones *t* A-9
A.6 Valores críticos de tolerancia para distribuciones normales de población A-10
A.7 Valores críticos para distribuciones chi-cuadrada A-11
A.8 Áreas de cola de la curva *t* A-12
A.9 Valores críticos de la distribución *F* A-14

A.10 Valores críticos para la distribución de rango estudentizado A-20
A.11 Áreas de cola de la curva chi-cuadrada A-21
A.12 Valores críticos para la prueba de normalidad Ryan-Joiner A-23
A.13 Valores críticos para la prueba Wilcoxon de rangos con signo A-24
A.14 Valores críticos para la prueba Wilcoxon de suma de rangos A-25
A.15 Valores críticos para el intervalo Wilcoxon de rangos con signo A-26
A.16 Valores críticos para el intervalo Wilcoxon de suma de rangos A-27
A.17 Curvas β para pruebas t A-28

Respuestas a ejercicios seleccionados de número impar A-29
Glosario de símbolos y abreviaturas G-1
Índice I-1

1 Generalidades y estadística descriptiva

"No soy muy dado a lamentar, pero estuve desconcertado sobre esto un tiempo. Creo que debería haber estudiado mucho más estadísticas en la universidad."

Max Levchin, cofundador de Paypal, fundador de Slide.

Cita de la semana tomada del sitio web de la
American Statistical Association, 23 de noviembre de 2010

"Sigo diciendo que el trabajo sexy en los próximos 10 años serán los estadísticos y no estoy bromeando."

Hal Varian, economista en jefe Google.

The New York Times, 6 de agosto de 2009.

INTRODUCCIÓN

Los conceptos y métodos estadísticos no son sólo útiles sino que con frecuencia son indispensables para entender el mundo que nos rodea. Proporcionan formas de obtener ideas nuevas del comportamiento de muchos fenómenos que se presentarán en su campo de especialización escogido en ingeniería o ciencia.

La disciplina de estadística nos enseña cómo realizar juicios inteligentes y tomar decisiones informadas en la presencia de incertidumbre y variación. Sin incertidumbre o variación, habría poca necesidad de métodos estadísticos o de profesionales en estadística. Si cada componente de un tipo particular tuviera exactamente la misma duración, si todos los resistores producidos por un fabricante tuvieran el mismo valor de resistencia, si las determinaciones del pH en muestras de suelo de un lugar particular dieran resultados idénticos, y así sucesivamente, entonces una sola observación revelaría toda la información deseada.

Una importante manifestación de variación surge en el curso de la medición de emisiones en vehículos automotores. Los requerimientos de costo y tiempo del Federal Test Procedure (FTP) impiden su uso generalizado en programas de inspección de vehículos. En consecuencia, muchas agencias han creado pruebas menos costosas y más rápidas, las que se espera reproduzcan los resultados obtenidos con el FTP. De acuerdo con el artículo "Motor Vehicle Emissions Variability" (*J. of the Air and*

Waste Mgmt. Assoc., 1996: 667-675), la aceptación del FTP como patrón de oro ha llevado a la creencia ampliamente difundida de que las mediciones repetidas en el mismo vehículo conducirían a resultados idénticos (o casi idénticos). Los autores del artículo aplicaron el FTP a siete vehículos caracterizados como "altos emisores". He aquí los resultados de uno de los vehículos.

HC (g/milla)	13.8	18.3	32.2	32.5
CO (g/milla)	118	149	232	236

La variación sustancial en las mediciones tanto de HC como de CO proyecta una duda considerable sobre la sabiduría convencional y hace mucho más difícil realizar evaluaciones precisas sobre niveles de emisiones.

¿Cómo se pueden utilizar técnicas estadísticas para reunir información y sacar conclusiones? Supóngase, por ejemplo, que un ingeniero de materiales inventó un recubrimiento para retardar la corrosión en tuberías de metal en circunstancias específicas. Si este recubrimiento se aplica a diferentes segmentos de la tubería, la variación de las condiciones ambientales y de los segmentos mismos producirá más corrosión sustancial en algunos segmentos que en otros. Se podría utilizar un análisis estadístico en datos de dicho experimento para decidir si la cantidad *promedio* de corrosión excede un límite superior especificado de alguna clase o para predecir cuánta corrosión ocurrirá en una sola pieza de tubería.

Por otra parte, supóngase que el ingeniero inventó el recubrimiento con la creencia de que será superior al recubrimiento actualmente utilizado. Se podría realizar un experimento comparativo para investigar esta cuestión aplicando el recubrimiento actual a algunos segmentos de la tubería y el nuevo a otros segmentos. Esto debe realizarse con cuidado o se obtendrá una conclusión errónea. Por ejemplo, tal vez la cantidad promedio de corrosión sea idéntica con los dos recubrimientos. Sin embargo, el recubrimiento nuevo puede ser aplicado a segmentos que tengan una resistencia superior a la corrosión y en condiciones ambientales menos severas en comparación con los segmentos y condiciones del recubrimiento actual. El investigador probablemente observaría entonces una diferencia entre los dos recubrimientos atribuibles no a los recubrimientos mismos, sino sólo a variaciones extrañas. La estadística ofrece no sólo métodos para analizar resultados de experimentos una vez que se han realizado sino también sugerencias sobre cómo pueden realizarse los experimentos de una manera eficiente para mitigar los efectos de la variación y tener una mejor oportunidad de llegar a conclusiones correctas.

1.1 Poblaciones, muestras y procesos

Los ingenieros y científicos constantemente están expuestos a la recolección de hechos o **datos**, tanto en sus actividades profesionales como en sus actividades diarias. La disciplina de la estadística proporciona métodos de organizar y resumir datos y de sacar conclusiones basadas en la información contenida en los datos.

Una investigación típicamente se enfocará en una colección bien definida de objetos que constituyen una **población** de interés. En un estudio, la población podría consistir de todas las cápsulas de gelatina de un tipo particular producidas durante un periodo específico. Otra investigación podría implicar la población compuesta de todos los individuos que recibieron una licenciatura de ingeniería durante el año académico más reciente. Cuando la información deseada está disponible para todos los objetos de la población, se tiene lo que se llama un **censo**. Las restricciones de tiempo, dinero y otros recursos escasos casi siempre hacen que un censo sea impráctico o infactible. En su lugar, se selecciona un subconjunto de la población, **una muestra**, de manera pre-escrita. Así pues, se podría obtener una muestra de cojinetes de una corrida de producción particular como base para investigar si los cojinetes se ajustan a las especificaciones de fabricación, o se podría seleccionar una muestra de los graduados de ingeniería del último año para obtener retroalimentación sobre la calidad de los programas de estudio de ingeniería.

Por lo general existe interés sólo en ciertas características de los objetos en una población: el número de grietas en la superficie de cada recubrimiento, el espesor de cada pared de cápsula, el género de un graduado de ingeniería, la edad a la cual el individuo se graduó, y así sucesivamente. Una característica puede ser categórica, tal como el género o tipo de funcionamiento defectuoso o puede ser de naturaleza numérica. En el primer caso, el *valor* de la característica es una categoría (p. ej., femenino o soldadura insuficiente), mientras que en el segundo caso, el valor es un número (p. ej., edad = 23 años o diámetro = .502 cm). Una **variable** es cualquier característica cuyo valor puede cambiar de un objeto a otro en la población. Inicialmente las letras minúsculas del final de nuestro alfabeto denotarán las variables. Algunos ejemplos incluyen:

x = marca de la calculadora de un estudiante

y = número de visitas a un sitio web particular durante un periodo específico

z = distancia de frenado de un automóvil en condiciones específicas

Se obtienen datos al observar o una sola variable o en forma simultánea dos o más variables. Un conjunto de datos **univariantes** se compone de observaciones realizadas en una sola variable. Por ejemplo, se podría determinar el tipo de transmisión automática (A) o manual (M) en cada uno de diez automóviles recientemente adquiridos en cierto concesionario y el resultado sería el siguiente conjunto de datos categóricos

M A A A M A A M A A

La siguiente muestra de duraciones (horas) de baterías de la marca D puestas en cierto uso es un conjunto de datos numéricos univariantes:

5.6 5.1 6.2 6.0 5.8 6.5 5.8 5.5

Se tienen datos **bivariantes** cuando se realizan observaciones en cada una de dos variables. El conjunto de datos podría consistir en un par (altura, peso) por cada jugador integrante del equipo de basquetbol, con la primera observación como (72, 168), la segunda como (75, 212), y así sucesivamente. Si un ingeniero determina el valor tanto de x = componente de duración y y = razón de la falla del componente, el conjunto de datos resultante es bivariante con una variable numérica y la otra categórica. Los datos **multivariantes** surgen cuando se realizan observaciones en más de una variable (por lo que bivariante es un caso especial de multivariante). Por ejemplo, un médico investigador podría determinar la presión sanguínea sistólica, la presión sanguínea diastólica y el nivel de colesterol en suero de cada paciente participante en un estudio. Cada observación sería una terna de números, tal como (120, 80, 146). En muchos conjuntos de datos multivariantes, algunas variables son numéricas y otras son categóricas. Por lo tanto el número anual dedicado al automóvil de *Consumer Reports* da valores de tales variables como tipo de vehículo (pequeño, deportivo, compacto, tamaño mediano, grande), eficiencia de consumo de combustible en la ciudad y en carretera en millas por galón (mpg), tipo de tren motriz (ruedas traseras, ruedas delanteras, cuatro ruedas), etcétera.

Ramas de la estadística

Es posible que un investigador que ha recopilado datos desee resumir y describir características importantes de los mismos. Esto implica utilizar métodos de **estadística descriptiva**. Algunos de ellos son de naturaleza gráfica; la construcción de histogramas, diagramas de caja y gráficas de puntos son ejemplos primordiales. Otros métodos descriptivos implican el cálculo de medidas numéricas, tales como medias, desviaciones estándar y coeficientes de correlación. La amplia disponibilidad de programas de computadora estadísticos han hecho que estas tareas sean más fáciles de realizar de lo que antes eran. Las computadoras son mucho más eficientes que los seres humanos para calcular y crear imágenes (¡una vez que han recibido las instrucciones apropiadas del usuario!). Esto significa que el investigador no tiene que esforzarse mucho en el "trabajo tedioso" y tendrá más tiempo para estudiar los datos y extraer mensajes importantes. A lo largo de este libro se presentarán los datos de salida de varios paquetes tales como Minitab, SAS, S-Plus y R. El programa R puede ser descargado sin cargo del sitio http://www.r-project.org.

Ejemplo 1.1 La caridad es un gran negocio en Estados Unidos. El sitio web charitynavigator.com proporciona información de aproximadamente 5500 organizaciones de caridad y existe un gran número de pequeñas caridades que vuelan debajo del radar de la pantalla del navegador. Algunas organizaciones caritativas operan de modo muy eficiente, con gastos administrativos y de recaudación de fondos que sólo son un pequeño porcentaje de los gastos totales, mientras que otras gastan un alto porcentaje de lo que pueden tomar en tales actividades. En seguida se muestran los datos de los gastos en la recaudación de fondos como un porcentaje de los gastos totales para una muestra aleatoria de 60 organizaciones de caridad:

6.1	12.6	34.7	1.6	18.8	2.2	3.0	2.2	5.6	3.8
2.2	3.1	1.3	1.1	14.1	4.0	21.0	6.1	1.3	20.4
7.5	3.9	10.1	8.1	19.5	5.2	12.0	15.8	10.4	5.2
6.4	10.8	83.1	3.6	6.2	6.3	16.3	12.7	1.3	0.8
8.8	5.1	3.7	26.3	6.0	48.0	8.2	11.7	7.2	3.9
15.3	16.6	8.8	12.0	4.7	14.7	6.4	17.0	2.5	16.2

Sin organización, es difícil tener una idea de las características más importantes de los datos, qué podría ser un valor típico (o representativo), si los valores están muy concen-

```
Stem-and-leaf of FundRsng N = 60
Leaf Unit = 1.0
     0 | 0111112222333333344
     0 | 55556666666778888
     1 | 0001222244
     1 | 55666789
     2 | 01
     2 | 6
     3 | 4
     3 |
     4 |
     4 | 8
     5 |
     5 |
     6 |
     6 |
     7 |
     7 |
     8 | 3
```

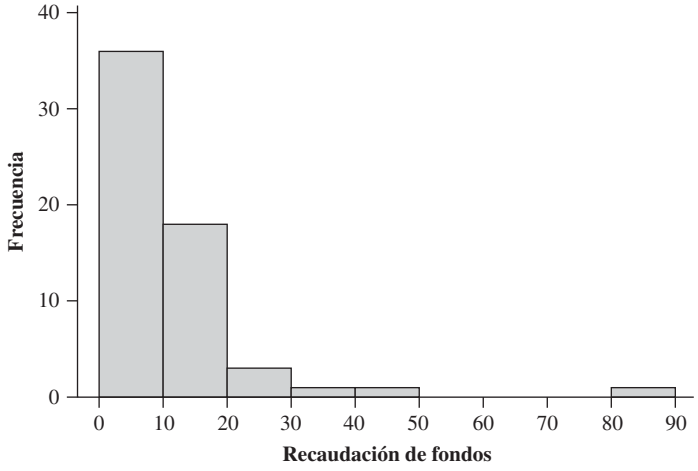


Figura 1.1 Gráfica de tallos y hojas (truncada a diez dígitos) de Minitab e histograma para los datos del porcentaje de recaudación de fondos de caridad

trados en torno a un valor típico o bastante dispersos, si existan brechas en los datos, qué porcentajes de los valores son menores a 20%, y así sucesivamente. La figura 1.1 muestra lo que se conoce como *gráfica de tallo y hojas* de los datos, así como también un *histograma*. En la sección 1.2 se discutirá la construcción e interpretación de estos resúmenes gráficos; por el momento se espera que se vea cómo los porcentajes están distribuidos sobre el rango de valores de 0 a 100. Es claro que la mayoría de las organizaciones de caridad en el ejemplo gastan menos de 20% en recaudar fondos y sólo unos pequeños porcentajes podrían ser vistos más allá del límite de una práctica sensible. ■

Después de haber obtenido una muestra de una población, un investigador con frecuencia desearía utilizar la información muestral para sacar algún tipo de conclusión (hacer una inferencia de alguna clase) con respecto a la población. Es decir, la muestra es un medio para llegar a un fin en lugar de un fin por sí misma. Las técnicas para generalizar a partir de una muestra hasta una población se congregan dentro de la rama de la disciplina llamada **estadística inferencial.**

Ejemplo 1.2 Las investigaciones de resistencia de materiales constituyen una rica área de aplicación de métodos estadísticos. El artículo "Effects of Aggregates and Microfillers on the Flexural Properties of Concrete" (*Magazine of Concrete Research*, 1997: 81–98) reportó sobre un estudio de propiedades de resistencia de concreto de alto desempeño obtenido con el uso de superplastificantes y ciertos aglomerantes. La resistencia a la compresión de dicho concreto previamente había sido investigada, pero no se sabía mucho sobre la resistencia a la flexión (una medida de la capacidad de resistir fallas por flexión). Los datos anexos sobre resistencia a la flexión (en megapascales, MPa, donde 1 Pa (pascal) = 1.45×10^{-4} lb/pulg^2) aparecieron en el artículo citado:

5.9	7.2	7.3	6.3	8.1	6.8	7.0	7.6	6.8	6.5	7.0	6.3	7.9	9.0
8.2	8.7	7.8	9.7	7.4	7.7	9.7	7.8	7.7	11.6	11.3	11.8	10.7	

Supóngase que se desea *estimar* el valor promedio de resistencia a la flexión de todas las vigas que pudieran ser fabricadas de esta manera (si se conceptualiza una población de todas esas vigas, se trata de estimar la media poblacional). Se puede demostrar que, con un alto grado de confianza, la resistencia media de la población se encuentra entre 7.48 MPa y 8.80 MPa; esto se llama *intervalo de confianza* o *estimación de intervalo*. Alternativamente, se podrían utilizar estos datos para predecir la resistencia a la flexión de una *sola* viga de este tipo. Con un alto grado de confianza, la resistencia de una sola viga excederá de 7.35 MPa; el número 7.35 se conoce como *límite de predicción inferior*. ■

El objetivo principal de este libro es presentar e ilustrar métodos de estadística inferencial que son útiles en el trabajo científico. Los tipos más importantes de procedimientos inferenciales, estimación puntual, comprobación de hipótesis y estimación por medio de intervalos de confianza, se introducen en los capítulos 6 a 8 y luego se utilizan escenarios más complicados en los capítulos 9 a 16. El resto de este capítulo presenta métodos de estadística descriptiva que se utilizan mucho en el desarrollo de inferencia.

Los capítulos 2 a 5 presentan material de la disciplina de probabilidad. Este material finalmente tiende un puente entre las técnicas descriptivas e inferenciales. El dominio de la probabilidad permite entender mejor cómo se desarrollan y utilizan los procedimientos inferenciales, cómo las conclusiones estadísticas pueden ser traducidas al lenguaje diario e interpretadas y cuándo y dónde pueden ocurrir errores al aplicar los métodos. La probabilidad y estadística se ocupan de cuestiones que implican poblaciones y muestras, pero lo hacen de una "manera inversa" una con respecto a la otra.

En un problema de probabilidad, se supone que las propiedades de la población estudiada son conocidas (p. ej., en una población numérica, se puede suponer una cierta distribución especificada de valores de la población) y se pueden plantear y responder preguntas con respecto a una muestra tomada de una población. En un problema de esta-

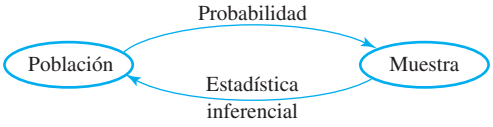


Figura 1.2 Relación entre probabilidad y estadística inferencial

dística, el experimentador dispone de las características de una muestra y esta información le permite sacar conclusiones con respecto a la población. La relación entre las dos disciplinas se resume diciendo que la probabilidad discurre de la población a la muestra (razonamiento deductivo), mientras que la estadística inferencial discurre de la muestra a la población (razonamiento inductivo). Esto se ilustra en la figura 1.2.

Antes de que se pueda entender lo que una muestra particular pueda decir sobre la población, primero se deberá entender la incertidumbre asociada con la toma de una muestra de una población dada. Por eso se estudia la probabilidad antes que la estadística.

Ejemplo 1.3 Como un ejemplo del enfoque contrastante de la probabilidad y la estadística inferencial, considere el uso que los conductores hacen de los cinturones de seguridad manuales de regazo en carros equipados con sistemas de cinturones de hombro automáticos. (El artículo "Automobile Seat Belts: Usage Patterns in Automatic Belt Systems", *Human Factors*, 1998: 126–135, resume datos de uso.) Se podría suponer que probablemente el 50% de todos los conductores de carros equipados de esta manera en cierta área metropolitana utilizan de manera regular su cinturón de regazo (una suposición sobre la población), así que se podría preguntar, "¿qué tan probable es que una muestra de 100 conductores incluirá por lo menos 70 que regularmente utilicen su cinturón de regazo?" o "¿cuántos de los conductores en una muestra de tamaño 100 se puede esperar que utilicen con regularidad su cinturón de regazo?". Por otra parte, en estadística inferencial se dispone de información sobre la muestra; por ejemplo, una muestra de 100 conductores de tales vehículos reveló que 65 utilizan con regularidad su cinturón de regazo. Se podría entonces preguntar: "¿Proporciona esto evidencia sustancial para concluir que más del 50% de todos los conductores en esta área utilizan con regularidad su cinturón de regazo?" En el último escenario se intenta utilizar la información sobre la muestra para responder una pregunta sobre la estructura de toda la población de la cual se seleccionó la muestra. ■

En el ejemplo del cinturón de regazo, la población está bien definida y concreta: todos los conductores de carros equipados de una cierta manera en un área metropolitana particular. En el ejemplo 1.2, sin embargo, las mediciones de resistencia vienen de una muestra de vigas prototipo que no tuvieron que seleccionarse de una población existente. En su lugar, conviene pensar en la población como compuesta de todas las posibles mediciones de resistencia que se podrían hacer en condiciones experimentales similares. Tal población se conoce como **población conceptual** o **hipotética.** Existen varias situaciones en las cuales las preguntas encajan en el marco de referencia de la estadística inferencial al conceptualizar una población.

El ámbito de la estadística moderna

Actualmente, la metodología estadística es empleada por investigadores en prácticamente todas las disciplinas, incluyendo algunas áreas como

- biología molecular (en el análisis de datos de microarreglos)
- ecología (en la descripción cuantitativa de cómo individuos de varias poblaciones de plantas y animales están distribuidos espacialmente)

- ingeniería de materiales (en el estudio de propiedades de varios tratamientos para retardar la corrosión)
- marketing (en el desarrollo de estudios de mercado y estrategias para la comercialización de nuevos productos)
- salud pública (en la identificación de fuentes de enfermedades y sus formas de tratamiento)
- ingeniería civil (en la evaluación de los efectos de los esfuerzos en los elementos estructurales y los impactos del flujo del tránsito de vehículos en las comunidades)

A medida que se progrese en el libro, se encontrará un amplio espectro de escenarios diferentes en los ejemplos y ejercicios que ilustran la aplicación de técnicas de probabilidad y estadística. Muchos de estos escenarios involucran datos u otros materiales extraídos de artículos de ingeniería y revistas de ciencia. Los métodos aquí presentados convierten herramientas establecidas y confiables en el arsenal de todo aquel que trabaja con datos. Mientras tanto, los estadísticos continúan desarrollando nuevos modelos para describir aleatoriedad, incertidumbre y una metodología nueva para el análisis de datos. Como evidencia de los continuos esfuerzos creativos en la comunidad estadística, existen títulos y cápsulas con descripciones de artículos publicados recientemente en revistas de estadística (*Journal of the American Statistical Association* y los *Annals of Applied Statistics*, cuyas siglas son *JASA* y *AAS*, respectivamente, dos de las revistas más importantes en esta disciplina):

- "Modeling Spatiotemporal Forest Health Monitoring Data"(*JASA*, 2009: 899–911): Sistemas de vigilancia de la salud forestal se crearon en toda Europa en la década de 1980 en respuesta a la preocupación por la desaparición de los bosques relacionada con la contaminación del aire y han continuado operando con un enfoque más reciente sobre las amenazas del cambio climático y el aumento de los niveles de ozono. Los autores desarrollan una descripción cuantitativa de la defoliación de copas, un indicador de la salud de los árboles.
- "Active Learning Through Sequential Design, with Applications to the Detection of Money Laundering" (*JASA*, 2009: 969–981): El lavado de dinero consiste en ocultar el origen de los fondos obtenidos a través de actividades ilegales. El enorme número de transacciones que ocurren a diario en las instituciones financieras dificulta la detección del lavado de capitales. El planteamiento más común ha sido extraer un resumen de diversas cantidades de la historia de las transacciones y llevar a cabo una investigación de mucho tiempo de actividades sospechosas. El artículo propone un método estadístico más eficiente e ilustra su uso en un caso de estudio.
- "Robust Internal Benchmarking and False Discovery Rates for Detecting Racial Bias in Police Stops" (*JASA*, 2009:661–668): Alegatos de las acciones policiales atribuidas al menos en parte a los prejuicios raciales se han convertido en un tema polémico en muchas comunidades. En este artículo se propone un nuevo método que está diseñado para reducir el riesgo de marcar un número sustancial de "falsos positivos" (personas falsamente identificadas como la manifestación de un sesgo). El método se aplicó a los datos de 500,000 peatones detenidos en la ciudad de Nueva York en 2006; de los 3000 agentes que participan regularmente en la detención de peatones, 15 fueron identificados por haber detenido una fracción mucho mayor de negros e hispanos de lo que podría predecirse en ausencia del sesgo.
- "Records in Athletics Through Extreme Value Theory"(*JASA*, 2008:1382–1391): El documento se centra en el modelado de los extremos relacionados con récords mundiales en atletismo. Los autores comienzan planteando dos cuestiones: (1) ¿Cuál es el último récord mundial en un evento específico (por ejemplo, el salto de altura para las mujeres)? y (2) ¿Cuán "bueno" es el actual récord mundial y cómo es la calidad de los actuales récords del mundo al comparar los diferentes eventos? Se considera

un total de 28 eventos (8 carreras, 3 lanzamientos, y 3 saltos para los hombres y mujeres). Por ejemplo, una conclusión es que el récord masculino de maratón sólo se ha reducido 20 segundos, pero el que registran las mujeres actualmente en el maratón es casi 5 minutos más de lo que en última instancia se puede lograr. La metodología también tiene aplicaciones a problemas tales como asegurar que las pistas de aterrizaje sean lo suficientemente largas o que los diques en Holanda sean lo suficientemente altos.

- "Analysis of Episodic Data with Application to Recurrent Pulmonary Exacerbations in Cystic Fibrosis Patients" (*JASA,* 2008: 498–510): El análisis de los eventos médicos recurrentes, tales como dolores de cabeza por migraña, deben tener en cuenta no sólo cuándo tales eventos aparecen por primera vez, sino también su duración, la gran duración de los episodios pueden contener información importante acerca de la gravedad de la enfermedad, los costos médicos asociados y la calidad de vida. El artículo propone una técnica que resume tanto la frecuencia de los episodios y la duración de los mismos y permite que la ocurrencia del episodio y las características de los efectos puedan variar con el tiempo. La técnica se aplica a los datos sobre pacientes con fibrosis quística (FQ es un trastorno genético grave que afecta las glándulas sudoríparas y otras).
- "Prediction of Remaining Life of Power Transformers Based on Left Truncated and Right Censored Lifetime Data" (*AAS*, 2009: 857–879): Hay aproximadamente 150,000 transformadores de transmisión de energía de alta tensión en Estados Unidos. Fallas inesperadas pueden causar grandes pérdidas económicas, por lo que es importante contar con las predicciones de vida restante. Los datos pertinentes pueden ser complicados, porque la vida útil de algunos transformadores se extiende por varias décadas durante las cuales los registros no eran necesariamente completos. En particular, los autores del artículo utilizan datos de una empresa de energía que comenzó a llevar registros detallados en 1980. Sin embargo, algunos transformadores se habían instalado antes de enero 1 de 1980 y todavía estaban en servicio después de esa fecha ("truncamiento a la izquierda" de datos), mientras que otras unidades estaban aún en servicio en el momento de la investigación, por lo que su vida completa no está disponible ("truncamiento a la derecha" de datos). El artículo describe los diversos procedimientos para la obtención de un intervalo de valores posibles (un *intervalo de predicción*) para toda la vida restante y el número acumulado de fallas en un periodo especificado.
- "The BARISTA: A Model for Bid Arrivals in Online Auctions" (*AAS,* 2007: 412–441): Las subastas en línea como las de eBay y uBid a menudo tienen características que las diferencian de las subastas tradicionales. Una diferencia muy importante es que el número de oferentes en el comienzo de muchas subastas tradicionales es fijo, mientras que en las subastas en línea este número y el número de ofertas resultantes no está predeterminado. El artículo propone una nueva BARISTA (Bid ARrivals In STAges) modelo para describir la forma en que llegan las ofertas en línea. El modelo permite hacer de manera intensa una oferta más alta al comienzo de la subasta y también cuando ésta llega a su fin. Varias propiedades del modelo son investigadas y validadas con datos de las subastas de eBay.com para asistentes personales Palm M515, juegos de Microsoft Xbox y relojes Cartier.
- "Statistical Challenges in the Analysis of Cosmic Microwave Background Radiation" (*AAS,* 2009: 61–95): El fondo cósmico de microondas (CMB, por sus siglas en inglés) es una fuente importante de información sobre la historia temprana del universo. Su nivel de radiación es uniforme, e instrumentos extremadamente delicados han sido desarrollados para medir las fluctuaciones. Los autores proporcionan una revisión de las cuestiones estadísticas del CMB con el análisis de datos, también dan muchos ejemplos de la aplicación de procedimientos estadísticos a los datos obtenidos de una reciente misión del satélite de la NASA, la *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*.

La información estadística aparece ahora con mayor frecuencia en los medios populares y en ocasiones el centro de atención se enfoca en los estadísticos. Por ejemplo, el 23 de noviembre de 2009, el *New York Times* reportó en un artículo "Behind Cancer Guidelines, Quest for Data" que la nueva ciencia para la investigación del cáncer y métodos más sofisticados para el análisis de los datos hecho por los servicios preventivos de EE.UU. impulsó un grupo de trabajo para reexaminar las directrices de cómo las mujeres, frecuentemente de mediana edad en adelante, deben hacerse mamografías. El panel formó seis grupos independientes para hacer modelos estadísticos. El resultado fue un nuevo conjunto de conclusiones, incluida la afirmación de que las mamografías cada dos años son tan beneficiosas como las mamografías anuales para las pacientes, pero con sólo la mitad del riesgo de sufrir daños. Donald Berry, un bioestadístico muy prominente, fue citado diciendo que estaba gratamente sorprendido de que el grupo de trabajo tomara la nueva investigación en serio para la formulación de sus recomendaciones. El informe del grupo de trabajo ha generado mucha controversia entre las organizaciones del cáncer, los políticos y las propias mujeres.

Es nuestra esperanza que usted esté cada vez más convencido de la importancia y la pertinencia de la disciplina de la estadística, así como de excavar más profundamente en el libro y el tema. Esperamos que se le motive lo suficiente como para querer continuar con su aprendizaje de la estadística más allá de su curso actual.

Estudios enumerativos contra analíticos

W. E. Deming, estadístico estadounidense muy influyente quien fue una fuerza propulsora en la revolución de calidad de Japón durante las décadas de 1950 y 1960, introdujo la distinción entre *estudios enumerativos* y *estudios analíticos*. En los primeros, el interés se enfoca en un conjunto de individuos u objetos finito, identificable y no cambiante que conforman una población. Un *marco de muestreo*, es decir, una lista de los individuos u objetos que tienen que ser muestreados, está disponible para un investigador o puede ser construido. Por ejemplo, el marco se podría componer de todas las firmas incluidas en una petición para calificar cierta iniciativa para las boletas de votación en una elección próxima; por lo general se elige una muestra para indagar si el número de firmas *válidas* sobrepasa un valor especificado. Como otro ejemplo, el marco puede contener números de serie de todos los hornos fabricados por una compañía particular durante cierto lapso de tiempo; se puede seleccionar una muestra para inferir algo sobre la duración promedio de estas unidades. El uso de métodos inferenciales presentados en este libro es razonablemente no controversial en tales escenarios (aun cuando los estadísticos continúan argumentando sobre qué métodos particulares deben ser utilizados).

Un estudio analítico se define ampliamente como uno que no es de naturaleza enumerativa. Tales estudios a menudo se realizan con el objetivo de mejorar un producto futuro al actuar sobre un proceso de cierta clase (p. ej., recalibrar equipo o ajustar el nivel de alguna sustancia tal como la cantidad de un catalizador). A menudo se obtienen datos sólo sobre un proceso existente, uno que puede diferir en aspectos importantes del proceso futuro. No existe por lo tanto un marco de muestreo que enliste los individuos u objetos de interés. Por ejemplo, una muestra de cinco turbinas con un nuevo diseño puede ser fabricada y probada para investigar su eficiencia. Estas cinco podrían ser consideradas como una muestra de la población conceptual de todos los prototipos que podrían ser fabricados experimentalmente en condiciones similares, pero *no* necesariamente representativas de la población de las unidades fabricadas una vez que la producción futura esté en proceso. Los métodos para utilizar la información sobre muestras para sacar conclusiones sobre unidades de producción futuras pueden ser problemáticos. Se deberá llamar a alguien con los conocimientos necesarios en el área del diseño e ingeniería de turbinas (o de cualquier otra área pertinente) para que juzgue si tal extrapolación es sensible. Una buena exposición de estos temas se encuentra en el artículo "Assumptions for Statistical Inference", de Gerald Hahn y William Meeker (*The American Statistician*, 1993: 1–11).

Recopilación de datos

La estadística se ocupa no sólo de la organización y análisis de datos una vez que han sido recopilados sino también del desarrollo de técnicas de recopilación de datos. Si éstos no son apropiadamente recopilados, un investigador no puede ser capaz de responder las preguntas consideradas con un razonable grado de confianza. Un problema común es que la población objetivo, aquella sobre la cual se van a sacar conclusiones, puede ser diferente de la población realmente muestreada. Por ejemplo, a los publicistas les gustaría contar con varias clases de información sobre los hábitos de ver televisión de sus clientes potenciales. La información más sistemática de esta clase proviene de colocar dispositivos de monitoreo en un pequeño número de casas a través de Estados Unidos. Se ha conjeturado que la colocación de semejantes dispositivos por sí misma modifica el comportamiento del televidente, de modo que las características de la muestra pueden ser diferentes de aquellas de la población objetivo.

Cuando la recopilación de datos implica seleccionar individuos u objetos de un marco, el método más simple para garantizar una selección representativa es tomar una *muestra aleatoria simple*. Ésta es una para la cual cualquier subconjunto particular del tamaño especificado (p. ej., una muestra de tamaño 100) tiene la misma oportunidad de ser seleccionada. Por ejemplo, si el marco se compone de 1,000,000 de números de serie, los números 1, 2, . . . , hasta 1,000,000 podrían ser anotados en trozos idénticos de papel. Después de colocarlos en una caja y mezclarlos perfectamente, se sacan uno por uno hasta que se obtenga el tamaño de muestra requisito. De manera alternativa (y mucho más preferible), se podría utilizar una tabla de números aleatorios o un generador de números aleatorios de computadora.

En ocasiones se pueden utilizar métodos de muestreo alternativos para facilitar el proceso de selección, a fin de obtener información extra o para incrementar el grado de confianza en conclusiones. Un método como ése, el *muestreo estratificado*, implica separar las unidades de la población en grupos no traslapantes y tomar una muestra de cada uno. Por ejemplo, un fabricante de reproductores de DVD podría desear información sobre la satisfacción del cliente para unidades producidas durante el año previo. Si tres modelos diferentes fueran fabricados y vendidos, se podría seleccionar una muestra distinta de cada uno de los estratos correspondientes. Esto daría información sobre los tres modelos y garantizaría que ningún modelo estuviera sobre o subrepresentado en toda la muestra.

Con frecuencia, se obtiene una muestra de "conveniencia" seleccionando individuos u objetos sin aleatorización sistemática. Por ejemplo, un conjunto de ladrillos puede ser apilado de tal modo que sea extremadamente difícil seleccionar a los que se encuentran en el centro. Si los ladrillos localizados en la parte superior y a los lados de la pila fueran de algún modo diferentes a los demás, los datos muestrales resultantes no representarían la población. A menudo un investigador supondrá que tal muestra de conveniencia representa en forma aproximada una muestra aleatoria, en cuyo caso el repertorio de métodos inferenciales de un estadístico puede ser utilizado; sin embargo, ésta es una cuestión de criterio. La mayoría de los métodos aquí analizados se basan en una variación del muestreo aleatorio simple descrito en el capítulo 5.

Los ingenieros y científicos a menudo reúnen datos realizando alguna clase de experimento. Esto puede implicar cómo asignar varios tratamientos diferentes (tales como fertilizantes o recubrimientos anticorrosivos) a las varias unidades experimentales (parcelas o tramos de tubería). Por otra parte, un investigador puede variar sistemáticamente los niveles o categorías de ciertos factores (p. ej., presión o tipo de material aislante) y observar el efecto en alguna variable de respuesta (tal como rendimiento de un proceso de producción).

Ejemplo 1.4 Un artículo en el *New York Times* (27 de enero de 1987) reportó que el riesgo de sufrir un ataque cardiaco podría ser reducido tomando aspirina. Esta conclusión se basó en un experimento diseñado que incluía tanto un grupo de control de individuos que tomaron un placebo que tenía la apariencia de aspirina pero que se sabía era inerte y un grupo de

tratamiento que tomó aspirina de acuerdo con un régimen específico. Los sujetos fueron asignados al azar a los grupos para protegerlos contra cualquier prejuicio de modo que se pudieran utilizar métodos basados en la probabilidad para analizar los datos. De los 11,034 individuos en el grupo de control, 189 experimentaron subsecuentemente ataques cardiacos, mientras que sólo 104 de los 11,037 en el grupo de aspirina sufrieron un ataque cardiaco. La tasa de incidencia de ataques cardiacos en el grupo de tratamiento fue de sólo aproximadamente la mitad de aquella en el grupo de control. Una posible explicación de este resultado es la variación de la probabilidad, que la aspirina en realidad no tiene el efecto deseado y la diferencia observada es sólo una variación típica del mismo modo que el lanzamiento al aire de dos monedas idénticas por lo general produciría diferentes cantidades de águilas. No obstante, en este caso, los métodos inferenciales sugieren que la variación de la probabilidad por sí misma no puede explicar en forma adecuada la magnitud de la diferencia observada. ■

Ejemplo 1.5 Un ingeniero desea investigar los efectos tanto del tipo de adhesivo como del material conductor en la fuerza adhesiva cuando se monta un circuito integrado (CI) sobre cierto sustrato. Se consideraron dos tipos de adhesivo y dos materiales conductores. Se realizaron dos observaciones por cada combinación de tipo de adhesivo/material conductor y se obtuvieron los datos anexos.

Tipo de adhesivo	Material conductor	Fuerza adhesiva observada	Promedio
1	1	82, 77	79.5
1	2	75, 87	81.0
2	1	84, 80	82.0
2	2	78, 90	84.0

Las fuerzas adhesivas promedio resultantes se ilustran en la figura 1.3. Parece que el adhesivo tipo 2 mejora la fuerza adhesiva en comparación con el tipo 1 en aproximadamente la misma cantidad siempre que se utiliza uno de los materiales conductores, con la combinación 2, 2 como la mejor. De nuevo se pueden utilizar métodos inferenciales para juzgar si estos efectos son reales o simplemente se deben a la variación de la probabilidad.

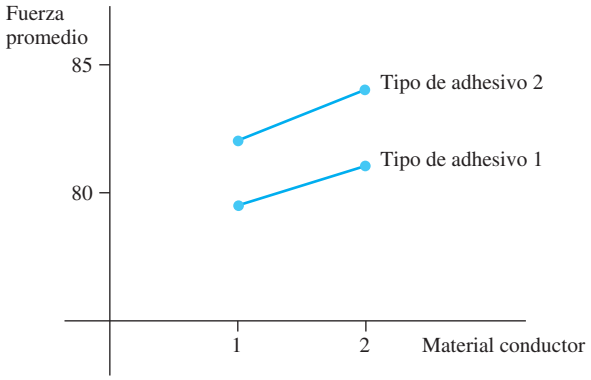


Figura 1.3 Fuerzas adhesivas promedio en el ejemplo 1.5

Supóngase además que se consideran dos tiempos de curado y también dos tipos de posrecubrimientos de los circuitos integrados. Existen entonces $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ combinaciones de estos cuatro factores y es posible que el ingeniero no disponga de suficientes recursos para hacer incluso una observación sencilla para cada una de estas combinaciones. En el capítulo 11 se verá cómo la selección cuidadosa de una fracción de estas posibilidades usualmente dará la información deseada. ■

EJERCICIOS Sección 1.1 (1–9)

1. Dé una posible muestra de tamaño 4 de cada una de las siguientes poblaciones.
- **a.** Todos los periódicos publicados en Estados Unidos
- **b.** Todas las compañías listadas en la Bolsa de Valores de Nueva York.
- **c.** Todos los estudiantes en su colegio o universidad.
- **d.** Todas las calificaciones promedio de los estudiantes en su colegio o universidad.

2. Para cada una de las siguientes poblaciones hipotéticas, dé una muestra posible de tamaño 4:
- **a.** Todas las distancias que podrían resultar cuando usted lanza un balón de futbol americano.
- **b.** Las longitudes de las páginas de libros publicados de aquí a 5 años.
- **c.** Todas las mediciones de intensidades posibles de terremotos (escala de Richter) que pudieran registrarse en California durante el siguiente año.
- **d.** Todos los posibles rendimientos (en gramos) de una cierta reacción química realizada en un laboratorio.

3. Considere la población compuesta de todas las computadoras de una cierta marca y modelo y enfóquese en si una computadora necesita servicio mientras se encuentra dentro de la garantía.
- **a.** Plantee varias preguntas de probabilidad con base en la selección de 100 de esas computadoras.
- **b.** ¿Qué pregunta de estadística inferencial podría ser respondida determinando el número de dichas computadoras en una muestra de tamaño 100 que requieren servicio de garantía?

4. **a.** Dé tres ejemplos diferentes de poblaciones concretas y tres ejemplos distintos de poblaciones hipotéticas.
- **b.** Por cada una de sus poblaciones concretas e hipotéticas, dé un ejemplo de una pregunta de probabilidad y un ejemplo de pregunta de estadística inferencial.

5. Muchas universidades y colegios han instituido programas de instrucción suplementaria (IS), en los cuales un facilitador regularmente se reúne con un pequeño grupo de estudiantes inscritos en el curso para promover discusiones sobre el material incluido en el curso y mejorar el dominio de la materia. Suponga que los estudiantes inscritos en un largo curso de estadística (¿de qué más?) se dividen al azar en un grupo de control que no participará en la instrucción suplementaria y en un grupo de tratamiento que sí participará. Al final del curso, se determina la calificación total de cada estudiante en el curso.
- **a.** ¿Son las calificaciones del grupo IS una muestra de una población existente? De ser así, ¿cuál es? De no ser así, ¿cuál es la población conceptual pertinente?
- **b.** ¿Cuál piensa que es la ventaja de dividir al azar a los estudiantes en los dos grupos en lugar de permitir que cada estudiante elija el grupo al que desea unirse?
- **c.** ¿Por qué los investigadores no pusieron a todos los estudiantes en el grupo de tratamiento? *Nota*: el artículo "Supplemental Instruction: An Effective Component of Student Affairs Programming" (*J. of College Student Devel.*, 1997:577–586) discute el análisis de datos de varios programas de instrucción suplementaria.

6. El sistema de la Universidad Estatal de California (CSU, por sus siglas en inglés) consta de 23 campus universitarios, desde la Estatal de San Diego en el sur hasta la Estatal Humboldt cerca de la frontera con Oregon. Un administrador de CSU desea hacer una inferencia sobre la distancia promedio entre la ciudad natal de los estudiantes y sus campus universitarios. Describa y discuta varios diferentes métodos de muestreo que pudieran ser empleados. ¿Éste sería un estudio enumerativo o un estudio analítico? Explique su razonamiento.

7. Cierta ciudad se divide naturalmente en diez distritos. ¿Cómo podría seleccionar un valuador de bienes raíces una muestra de casas unifamiliares que pudiera ser utilizada como base para desarrollar una ecuación para predecir el valor estimado a partir de características tales como antigüedad, tamaño, número de baños, distancia a la escuela más cercana y así sucesivamente? ¿El estudio es enumerativo o analítico?

8. La cantidad de flujo a través de una válvula solenoide en el sistema de control de emisiones de un automóvil es una característica importante. Se realizó un experimento para estudiar cómo la velocidad de flujo dependía de tres factores: la longitud de la armadura, la fuerza del resorte y la profundidad de la bobina. Se eligieron dos niveles diferentes (alto y bajo) de cada factor y se realizó una sola observación del flujo por cada combinación de niveles.
- **a.** ¿De cuántas observaciones consistió el conjunto de datos resultante?
- **b.** ¿Este estudio es enumerativo o analítico? Explique su razonamiento.

9. En un famoso experimento realizado en 1882, Michelson y Newcomb obtuvieron 66 observaciones del tiempo que requería la luz para viajar entre dos lugares en Washington, D.C. Algunas de las mediciones (codificadas en cierta manera) fueron, 31, 23, 32, 36, –2, 26, 27 y 31.
- **a.** ¿Por qué no son idénticas estas mediciones?
- **b.** ¿Es éste un estudio enumerativo? ¿Por qué sí o por qué no?

1.2 Métodos pictóricos y tabulares en la estadística descriptiva

La estadística descriptiva se divide en dos temas generales. En esta sección se considera la representación de un conjunto de datos por medio de técnicas visuales. En las secciones 1.3 y 1.4 se desarrollarán algunas medidas numéricas para conjuntos de datos. Es posible que usted ya conozca muchas técnicas visuales; tablas de frecuencia, hojas de contabili-

dad, histogramas, gráficas de pastel, gráficas de barras, diagramas de puntos y similares. Aquí se seleccionan algunas de estas técnicas que son más útiles y pertinentes para la probabilidad y estadística inferencial.

Notación

Alguna notación general facilitará la aplicación de métodos y fórmulas a una amplia variedad de problemas prácticos. El número de observaciones en una muestra única, es decir, el *tamaño de muestra*, a menudo será denotado por n, de modo que $n = 4$ para la muestra de universidades {Stanford, Iowa State, Wyoming, Rochester} y también para la muestra de lecturas de pH {6.3, 6.2, 5.9, 6.5}. Si se consideran dos muestras al mismo tiempo, m y n o n_1 y n_2 se pueden utilizar para denotar los números de observaciones. Por lo tanto si {29.7, 31.6, 30.9} y {28.7, 29.5, 29.4, 30.3} son lecturas de eficiencia térmica de dos tipos diferentes de motores diesel, entonces $m = 3$ y $n = 4$.

Dado un conjunto de datos compuesto de n observaciones de alguna variable x, entonces $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ denotarán las observaciones individuales. El subíndice no guarda ninguna relación con la magnitud de una observación particular. Por lo tanto x_1 en general no será la observación más pequeña del conjunto, ni x_n será la más grande. En muchas aplicaciones, x_1 será la primera observación realizada por el experimentador, x_2 la segunda, y así sucesivamente. La observación i-ésima del conjunto de datos será denotada por x_i.

Gráficas de tallos y hojas

Considérese un conjunto de datos numéricos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para el cual cada x_i se compone de por lo menos dos dígitos. Una forma rápida de obtener la representación visual informativa del conjunto de datos es construir una *gráfica de tallos y hojas*.

Pasos para construir una gráfica de tallos y hojas

1. Seleccione uno o más de los primeros dígitos para los valores de tallo. Los segundos dígitos se convierten en hojas.
2. Enumere los posibles valores de tallos en una columna vertical.
3. Anote la hoja para cada observación junto al correspondiente valor de tallo.
4. Indique las unidades para tallos y hojas en algún lugar de la gráfica.

Si el conjunto de datos se compone de calificaciones de exámenes, cada uno entre 0 y 100, la calificación de 83 tendría un tallo de 8 y una hoja de 3. Para un conjunto de datos de eficiencias de consumo de combustible de automóviles (mpg), todos entre 8.1 y 47.8, se podría utilizar el dígito de las decenas como el tallo, así que 32.6 tendría entonces una hoja de 2.6. En general, se recomienda una gráfica basada en tallos entre 5 y 20.

Ejemplo 1.6 El consumo de alcohol por parte de estudiantes universitarios preocupa no sólo a la comunidad académica sino también, a causa de consecuencias potenciales de salud y seguridad, a la sociedad en su conjunto. El artículo "Health and Behavioral Consequences of Binge Drinking in College" (*J. of the Amer. Med. Assoc.*, 1994: 1672–1677 presentó un amplio estudio sobre el consumo excesivo de alcohol en universidades a través de Estados Unidos. Un episodio de parranda se definió como cinco o más tragos en fila para varones y cuatro o más para mujeres. La figura 1.4 muestra una gráfica de tallo y hojas de 140 valores de x = porcentaje de edades de los estudiantes de licenciatura bebedores. (Estos valores no aparecieron en el artículo citado, pero la ilustración concuerda con una gráfica de los datos que sí se incluyó.)

La primera hoja de la fila 2 del tallo es 1, la cual dice que 21% de los estudiantes de una de las universidades de la muestra eran bebedores. Sin la identificación de los dígitos

```
0 | 4
1 | 1345678889
2 | 1223456666777889999
3 | 011223334455566667777788899999
4 | 111222223344445566666677788888999
5 | 00111222233455666667777888899
6 | 01111244455666778
```

Tallo: dígito de las decenas
Hojas: dígito de las unidades

Figura 1.4 Gráfica de tallo y hojas para el porcentaje de bebedores en cada una de las 140 universidades

en los tallos y los dígitos en las hojas, no se sabría si la observación correspondiente al tallo 2, hoja 1 debería leerse como 21%, 2.1% o .21%.

Cuando se crea una imagen a mano, la ordenación de las hojas de la más pequeña a la más grande en cada línea puede ser tediosa. Esta ordenación contribuye poco si no se dispone de información adicional. Supóngase que las observaciones hubieran sido puestas en lista en orden alfabético por nombre de la escuela, como

16% 33% 64% 37% 31% . . .

La colocación entonces de estos valores en la gráfica en este orden haría que la fila 1 del tallo tuviera 6 como su primera hoja y el principio de la fila 3 del tallo sería

3 | 371 . . .

La gráfica sugiere que un valor típico o representativo se encuentra en la fila 4 del tallo, tal vez en el rango medio de 40%. Las observaciones no aparecen muy concentradas en torno a este valor típico, como sería el caso si todos los valores estuvieran entre 20% y 49%. Esta gráfica se eleva a una sola cresta a medida que desciende, y luego declina; no hay brechas en la gráfica. La forma de la gráfica no es perfectamente simétrica, pero en su lugar parece alargarse un poco más en la dirección de las hojas bajas que en la dirección de las hojas altas. Por último, no existen observaciones que se alejen inusualmente del grueso de los datos (ningunos *valores apartados*), como sería el caso si uno de los valores de 26% hubiera sido de 86%. La característica más sobresaliente de estos datos es que, en la mayoría de las universidades de la muestra, por lo menos una cuarta parte de los estudiantes son bebedores. El problema de beber en exceso en las universidades es mucho más extenso de lo que muchos hubieran sospechado. ■

Una gráfica de tallos y hojas da información sobre los siguientes aspectos de los datos:

- identificación de un valor típico o representativo
- grado de dispersión en torno al valor típico
- presencia de brechas en los datos
- grado de simetría en la distribución de los valores
- número y localización de crestas
- presencia de valores afuera de la gráfica

Ejemplo 1.7 La figura 1.5 presenta gráficas de tallos y hojas de una muestra aleatoria de longitudes de campos de golf (yardas) designados por *Golf Magazine* como los más desafiantes en Estados Unidos. Entre la muestra de 40 campos, el más corto es de 6433 yardas de largo y el más largo de 7280 yardas. Las longitudes parecen estar distribuidas de una manera aproximadamente uniforme dentro del rango de valores presentes en la muestra. Obsérvese que la selección de tallo en este caso de un solo dígito (6 o 7) o de tres (643, . . . , 728) produciría una gráfica no informativa, primero a causa de pocos tallos y segundo a causa de demasiados.

Los programas de computadora de estadística en general no producen gráficas con tallos de dígitos múltiples. La gráfica Minitab que aparece en la figura 1.5(b) resulta de *truncar* cada observación al borrar los dígitos uno.

64	35	64	33	70	Tallo: dígitos de millares y centenas		
65	26	27	06	83	Hojas: dígitos de decenas y unidades		
66	05	94	14				
67	90	70	00	98	70	45	13
68	90	70	73	50			
69	00	27	36	04			
70	51	05	11	40	50	22	
71	31	69	68	05	13	65	
72	80	09					

(a)

```
Tallos y hojas de yardaje N = 40
Unidad de hoja = 10

   4          64   3367
   8          65   0228
  11          66   019
  18          67   0147799
 (4)          68   5779
  18          69   0023
  14          70   012455
   8          71   013666
   2          72   08
```

(b)

Figura 1.5 Gráficas de tallos y hojas de la longitud de los campos de golf (a) hojas de dos dígitos; (b) gráfica Minitab de hojas con truncamiento a un dígito ■

Gráficas de puntos

Una gráfica de puntos es un resumen atractivo de datos numéricos cuando el conjunto de datos es razonablemente pequeño o existen pocos valores de datos distintos. Cada observación está representada por un punto sobre la ubicación correspondiente en una escala de medición horizontal. Cuando un valor ocurre más de una vez, existe un punto por cada ocurrencia y estos puntos se apilan verticalmente. Como con la gráfica de tallos y hojas, una gráfica de puntos da información sobre la localización, dispersión, extremos y brechas.

Ejemplo 1.8 Aquí hay datos sobre los créditos estado por estado para la educación superior como porcentaje de los ingresos fiscales estatales y locales para el año fiscal 2006–2007 (tomados del *Statistical Abstract of the United States*); los valores se presentan en una lista, en el orden de las abreviaturas de cada estado (AL en primer lugar, WY al final):

10.8	6.9	8.0	8.8	7.3	3.6	4.1	6.0	4.4	8.3
8.1	8.0	5.9	5.9	7.6	8.9	8.5	8.1	4.2	5.7
4.0	6.7	5.8	9.9	5.6	5.8	9.3	6.2	2.5	4.5
12.8	3.5	10.0	9.1	5.0	8.1	5.3	3.9	4.0	8.0
7.4	7.5	8.4	8.3	2.6	5.1	6.0	7.0	6.5	10.3

La figura 1.6 muestra una gráfica de puntos para los datos. La característica más llamativa es la sustancial variación de un estado a otro. El valor más grande (para Nuevo México) y los dos valores más pequeños (Nueva Hampshire y Vermont) están algo separados de la mayor parte de los datos, aunque quizá no lo suficiente para considerarlos atípicos.

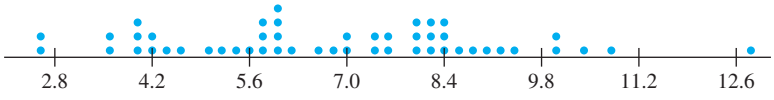


Figura 1.6 Gráfica de puntos para los datos del ejemplo 1.8

Si el número de observaciones de esfuerzo compresivo del ejemplo 1.2 hubiera consistido cuando mucho de $n = 27$ obtenidas realmente, habría sido muy tedioso construir una gráfica de puntos. La técnica siguiente es muy adecuada para situaciones como ésas.

2 Probabilidad

INTRODUCCIÓN

El término **probabilidad** se refiere al estudio del azar y la incertidumbre en cualquier situación en la cual varios posibles sucesos pueden ocurrir; la disciplina de la probabilidad proporciona métodos de cuantificar las oportunidades y probabilidades asociadas con los varios sucesos. El lenguaje de probabilidad se utiliza constantemente de manera informal tanto en el contexto escrito como en el hablado. Algunos ejemplos incluyen enunciados tales como "es probable que el índice Dow-Jones se incremente al final del año", "existen 50–50 probabilidades de que la persona en posesión de su cargo busque la reelección", "probablemente se ofrecerá por lo menos una sección del curso el próximo año", "las probabilidades favorecen la rápida solución de la huelga" y "se espera que se vendan por lo menos 20,000 boletos para el concierto". En este capítulo se introducen algunos conceptos de probabilidad, se indica cómo pueden ser interpretadas las probabilidades y se demuestra cómo pueden ser aplicadas las reglas de probabilidad para calcular las probabilidades de muchos eventos interesantes. La metodología de probabilidad permite entonces expresar en lenguaje preciso enunciados informales como los antes expresados.

El estudio de la probabilidad como una rama de las matemáticas se remonta a más de 300 años, cuando nace en conexión con preguntas que implicaban juegos de azar. Muchos libros se han ocupado exclusivamente de la probabilidad, pero el objetivo en este caso es abarcar sólo la parte de la materia que tiene más aplicación directa en problemas de inferencia estadística.

2.1 Espacios muestrales y eventos

Un **experimento** es cualquier acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre. Aunque la palabra *experimento* en general sugiere una situación de prueba cuidadosamente controlada en un laboratorio, se le utiliza aquí en un sentido mucho más amplio. Por lo tanto experimentos que pueden ser de interés incluyen lanzar al aire una moneda una o varias veces, seleccionar una carta o cartas de un mazo, pesar una hogaza de pan, medir el tiempo de recorrido de la casa al trabajo en una mañana particular, obtener tipos de sangre de un grupo de individuos o medir las resistencias a la compresión de diferentes vigas de acero.

El espacio muestral de un experimento

DEFINICIÓN

El **espacio muestral** de un experimento, denotado por $\mathcal{S}$, es el conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.

Ejemplo 2.1 El experimento más simple al que se aplica la probabilidad es uno con dos posibles resultados. Tal experimento consiste en examinar un fusible para ver si está defectuoso. El espacio muestral de este experimento se abrevia como $\mathcal{S} = \{N, D\}$, donde N representa no defectuoso, D representa defectuoso, y los paréntesis se utilizan para encerrar los elementos de un conjunto. Otro experimento como ése implicaría lanzar al aire una tachuela y observar si cae punta arriba o punta abajo, con espacio muestral $\mathcal{S} = \{U, D\}$, y otro más consistiría en observar el sexo del siguiente niño nacido en el hospital, con $\mathcal{S} = \{H, M\}$. ■

Ejemplo 2.2 Si se examinan tres fusibles en secuencia y se anota el resultado de cada examen, entonces un resultado del experimento es cualquier secuencia de letras N y D de longitud 3, por lo tanto

$$\mathcal{S} = \{NNN, NND, NDN, NDD, DNN, DND, DDN, DDD\}$$

Si se hubiera lanzado una tachuela tres veces, el espacio muestral se obtendría reemplazando N por U en la expresión $\mathcal{S}$ anterior, y con un cambio de notación similar se obtendría el espacio muestral para el experimento en el cual se observan los sexos de tres niños recién nacidos. ■

Ejemplo 2.3 Dos gasolineras están localizadas en cierta intersección. Cada una dispone de seis bombas de gasolina. Considérese el experimento en el cual se determina el número de bombas en uso a una hora particular del día en cada una de las gasolineras. Un resultado experimental especifica cuántas bombas están en uso en la primera gasolinera y cuántas están en uso en la segunda. Un posible resultado es (2, 2), otro es (4, 1) y otro más es (1, 4). Los 49 resultados en $\mathcal{S}$ se muestran en la tabla adjunta. El espacio muestral del experimento en el cual un dado de seis lados es lanzado dos veces se obtiene eliminando la fila 0 y la columna 0 de la tabla y se obtienen 36 resultados.

		Segunda estación						
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Primera estación	**0**	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)
	1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 0)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 0)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 0)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

■

Ejemplo 2.4 Un porcentaje bastante grande de programas C++ escritos en una empresa particular, compilan en la primera ejecución, pero algunos no lo hacen (un *compilador* es un programa que traduce el código fuente, en este caso programas C++, en lenguaje de máquina para que los programas puedan ser ejecutados). Supongamos que un experimento consiste en seleccionar y compilar programas C++ en este lugar uno por uno hasta encontrar uno que compile en la primera ejecución. Se denota un programa que compila en la primera ejecución por S (para el éxito) y uno que no lo hace por F (por error). Aunque puede que no sea muy probable, un posible resultado de este experimento es que los primeros 5 (o 10 o 20 o . . .) sean F y el siguiente sea un S. Es decir, para cualquier entero positivo n, es posible que tenga que examinar n programas antes de ver la primera S. El espacio muestral es $\mathcal{S} = \{S, FS, FFS, FFFS, \ldots\}$, el cual contiene un número infinito de posibles resultados. La misma forma abreviada del espacio muestral es apropiada para un experimento en el cual, a partir de una hora especificada, se anota el sexo de cada infante recién nacido hasta que nazca un varón. ■

Eventos

En el estudio de la probabilidad, interesan no sólo los resultados individuales de $\mathcal{S}$ sino también varias recopilaciones de resultados de $\mathcal{S}$.

DEFINICIÓN

> Un **evento** es cualquier recopilación (subconjunto) de resultados contenidos en el espacio muestral $\mathcal{S}$. Un evento es **simple** si consiste en exactamente un resultado y **compuesto** si consiste en más de un resultado.

Cuando se realiza un experimento, se dice que ocurre un evento particular A si el resultado experimental resultante está contenido en A. En general, ocurrirá exactamente un evento simple, pero muchos eventos compuestos ocurrirán al mismo tiempo.

Ejemplo 2.5 Considérese un experimento en el cual cada uno de tres vehículos que toman una salida de una autopista particular vira a la izquierda (L) o la derecha (R) al final de la rampa de salida. Los ocho posibles resultados que constituyen el espacio muestral son LLL, RLL, LRL, LLR, LRR, RLR, RRL y RRR. Así pues existen ocho eventos simples, entre los cuales están $E_1 = \{LLL\}$ y $E_5 = \{LRR\}$. Algunos eventos compuestos incluyen

$$A = \{RLL, LRL, LLR\} = \text{el evento en que exactamente uno de los tres vehículos vira a la derecha}$$

$$B = \{LLL, RLL, LRL, LLR\} = \text{el evento en que cuando mucho uno de los vehículos vira a la derecha}$$

$$C = \{LLL, RRR\} = \text{el evento en que los tres vehículos viren en la misma dirección}$$

Suponga que cuando se realiza el experimento, el resultado es LLL. Entonces ha ocurrido el evento simple E_1 y por lo tanto también comprende los eventos B y C (pero no A). ■

Ejemplo 2.6 (continuación del ejemplo 2.3) Cuando se observa el número de bombas en uso en cada una de dos gasolineras de seis bombas, existen 49 posibles resultados, por lo que existen 49 eventos simples: $E_1 = \{(0, 0)\}, E_2 = \{(0, 1)\}, \ldots, E_{49} = \{(6, 6)\}$. Ejemplos de eventos compuestos son

$A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ = el evento en que el número de bombas en uso es el mismo en ambas gasolineras

$B = \{(0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$ = el evento en que el número total de bombas en uso es cuatro

$C = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ = el evento en que a lo sumo una bomba está en uso en cada gasolinera. ■

Ejemplo 2.7 (continuación del ejemplo 2.4)

El espacio muestral del experimento del programa de compilación contiene un número infinito de resultados, por lo que existe un número infinito de eventos simples. Los eventos compuestos incluyen

$A = \{S, FS, FFS\}$ = el evento en que cuando mucho se examinan tres programas

$E = \{FS, FFFS, FFFFFS, \ldots\}$ = el evento en que se examina un número par de programas ■

Algunas relaciones de la teoría de conjuntos

Un evento es simplemente un conjunto, así que las relaciones y resultados de la teoría elemental de conjuntos pueden ser utilizados para estudiar eventos. Se utilizarán las siguientes operaciones para crear eventos nuevos a partir de eventos dados.

DEFINICIÓN

1. El **complemento** de un evento A, denotado por A', es el conjunto de todos los resultados en $\mathcal{S}$ que no están contenidos en A.
2. La **unión** de dos eventos A y B, denotados por $A \cup B$ y leídos "A *o* B", es el evento que consiste en todos los resultados que están *en A o en B o en ambos eventos* (de tal suerte que la unión incluya resultados donde tanto A como B ocurren, así también resultados donde ocurre exactamente uno), es decir, todos los resultados en por lo menos uno de los eventos.
3. La **intersección** de dos eventos A y B, denotada por $A \cap B$ y leída "A *y* B", es el evento que consiste en todos los resultados que están *tanto en A como en B*.

Ejemplo 2.8 (continuación del ejemplo 2.3)

En el experimento en el cual se observa el número de bombas en uso en una sola gasolinera de seis bombas, sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$. Entonces

$$A' = \{5, 6\}, \quad A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \mathcal{S}, \quad A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$A \cap B = \{3, 4\}, \quad A \cap C = \{1, 3\}, \quad (A \cap C)' = \{0, 2, 4, 5, 6\}$$ ■

Ejemplo 2.9 (continuación del ejemplo 2.4)

En el experimento de compilación de programas defina A, B y C como

$$A = \{S, FS, FFS\}, \quad B = \{S, FFS, FFFFS\}, \quad C = \{FS, FFFS, FFFFFS, \ldots\}$$

Entonces

$$A' = \{FFFS, FFFFS, FFFFFS, \ldots\}, \; C' = \{S, FFS, FFFFS, \ldots\}$$
$$A \cup B = \{S, FS, FFS, FFFFS\}, \quad A \cap B = \{S, FFS\}$$ ■

En ocasiones A y B no tienen resultados en común, por lo que la intersección de A y B no contiene resultados.

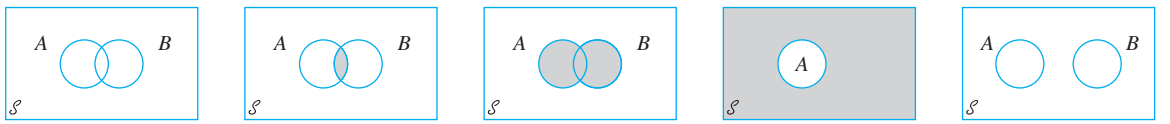
DEFINICIÓN

$\varnothing$ denota el *evento nulo* (el evento sin resultados). Cuando $A \cap B = \varnothing$, se dice que A y B son eventos **mutuamente exclusivos** o **disjuntos.**

Ejemplo 2.10 En una pequeña ciudad hay tres distribuidores de automóviles: un distribuidor GM que vende Chevrolets y Buicks; un distribuidor Ford que vende Fords y Lincolns; y un distribuidor Toyota. Si un experimento consiste en observar la marca del siguiente automóvil vendido, entonces los eventos $A = \{\text{Chevrolet, Buick}\}$ y $B = \{\text{Ford, Lincoln}\}$ son mutuamente exclusivos porque el siguiente automóvil vendido no puede ser tanto un producto GM como un producto Ford (¡a menos que las empresas se fusionen!) ■

Las operaciones de unión e intersección pueden ser ampliadas a más de dos eventos. Para tres eventos cualesquiera A, B y C, el evento $A \cup B \cup C$ es el conjunto de resultados contenidos en por lo menos uno de los tres eventos, mientras que $A \cap B \cap C$ es el conjunto de resultados contenidos en los tres eventos. Se dice que los eventos dados $A_1, A_2, A_3, \ldots$, son mutuamente exclusivos (disjuntos por pares) si ninguno de dos eventos tiene resultados en común.

Con diagramas de Venn se obtiene una representación pictórica de eventos y manipulaciones con eventos. Para construir un diagrama de Venn, se traza un rectángulo cuyo interior representará el espacio muestral $\mathcal{S}$. En tal caso cualquier evento A se representa como el interior de una curva cerrada (a menudo un círculo) contenido en $\mathcal{S}$. La figura 2.1 muestra ejemplos de diagramas de Venn.



(a) Diagrama de Venn de los eventos A y B

(b) La región sombreada es $A \cap B$

(c) La región sombreada es $A \cup B$

(d) La región sombreada es A'

(e) Eventos mutuamente excluyentes

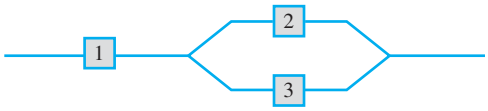
Figura 2.1 Diagramas de Venn

EJERCICIOS Sección 2.1 (1–10)

1. Cuatro universidades, 1, 2, 3 y 4, están participando en un torneo de basquetbol. En la primera ronda, 1 jugará con 2 y 3 jugará con 4. Acto seguido los dos ganadores jugarán por el campeonato y los dos perdedores también jugarán. Un posible resultado puede ser denotado por 1324 (1 derrota a 2 y 3 derrota a 4 en los juegos de la primera ronda, y luego 1 derrota a 3 y 2 derrota a 4).
- **a.** Enumere todos los resultados en $\mathcal{S}$.
- **b.** Que A denote el evento en que 1 gana el torneo. Enumere los resultados en A.
- **c.** Que B denote el evento en que 2 gana el juego de campeonato. Enumere los resultados en B.
- **d.** ¿Cuáles son los resultados en $A \cup B$ y en $A \cap B$? ¿Cuáles son los resultados en A'?

2. Suponga que un vehículo que toma una salida particular de una autopista puede virar a la derecha (R), virar a la izquierda (L) o continuar de frente (S). Observe la dirección de cada uno de tres vehículos sucesivos.
- **a.** Elabore una lista de todos los resultados en el evento A en que los tres vehículos van en la misma dirección.
- **b.** Elabore una lista de todos los resultados en el evento B en que los tres vehículos toman direcciones diferentes.
- **c.** Elabore una lista de todos los resultados en el evento C en que exactamente dos de los tres vehículos dan vuelta a la derecha.
- **d.** Elabore una lista de todos los resultados en el evento D en que dos vehículos van en la misma dirección.
- **e.** Enumere los resultados en D', $C \cup D$ y $C \cap D$.

3. Tres componentes están conectados para formar un sistema como se muestra en el diagrama adjunto. Como los componentes del subsistema 2–3 están conectados en paralelo, dicho subsistema funcionará si por lo menos uno de los dos componentes individuales funciona. Para que todo el sistema funcione, el componente 1 debe funcionar y por lo tanto el subsistema 2–3 debe hacerlo.



El experimento consiste en determinar la condición de cada componente [S (éxito) para un componente que funciona y F (falla) para un componente que no funciona].

a. ¿Qué resultados están contenidos en el evento A en que exactamente dos de los tres componentes funcionan?

b. ¿Qué resultados están contenidos en el evento B en que por lo menos dos de los componentes funcionan?

c. ¿Qué resultados están contenidos en el evento C en que el sistema funciona?

d. Ponga en lista los resultados en C', $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$ y $B \cap C$.

4. Cada una de una muestra de cuatro hipotecas residenciales está clasificada como tasa fija (F) o tasa variable (V).

a. ¿Cuáles son los 16 resultados en $\mathcal{S}$?

b. ¿Qué resultados están en el evento en que exactamente tres de las hipotecas seleccionadas son de tasa fija?

c. ¿Qué resultados están en el evento en que las cuatro hipotecas son del mismo tipo?

d. ¿Qué resultados están en el evento en que a lo sumo una de las cuatro es una hipoteca de tasa variable?

e. ¿Cuál es la unión de eventos en los incisos (c) y (d), y cuál es la intersección de estos dos eventos?

f. ¿Cuáles son la unión e intersección de los dos eventos en los incisos (b) y (c)?

5. Una familia compuesta de tres personas, A, B y C, acude a una clínica médica que siempre tiene disponible un doctor en cada una de las estaciones 1, 2 y 3. Durante cierta semana, cada miembro de la familia visita la clínica una vez y es asignado al azar a una estación. El experimento consiste en registrar la estación para cada miembro. Un resultado es (1, 2, 1) para A a la estación 1, B a la estación 2 y C a la estación 1.

a. Elabore una lista de los 27 resultados en el espacio muestral.

b. Elabore una lista de todos los resultados en el evento en que los tres miembros van a la misma estación.

c. Haga una lista de los resultados en el evento en el que todos los miembros van a diferentes estaciones.

d. Elabore una lista de los resultados en el evento en que ninguno va a la estación 2.

6. La biblioteca de una universidad dispone de cinco ejemplares de un cierto texto en reserva. Dos ejemplares (1 y 2) son primeras impresiones y los otros tres (3, 4 y 5) son segundas impresiones. Un estudiante examina estos libros en orden aleatorio y se detiene sólo cuando una segunda impresión ha sido seleccionada. Un posible resultado es 5 y otro 213.

a. Ponga en lista los resultados en $\mathcal{S}$.

b. Sea A el evento en que exactamente un libro debe ser examinado. ¿Qué resultados están en A?

c. Sea B el evento en que el libro 5 es seleccionado. ¿Qué resultados están en B?

d. Sea C el evento en que el libro 1 no es examinado. ¿Qué resultados están en C?

7. Un departamento académico acaba de votar en secreto para elegir un jefe de departamento. La urna contiene cuatro boletas con votos para el candidato A y tres con votos para el candidato B. Suponga que estas boletas se sacan de la urna una por una.

a. Ponga en lista todos los posibles resultados.

b. Suponga que mantiene un conteo continuo de las boletas retiradas de la urna. ¿Para qué resultados A se mantiene adelante de B durante todo el conteo?

8. Una firma constructora de ingeniería en la actualidad está trabajando en plantas eléctricas en tres sitios diferentes. Que A_i denote el evento en que la planta localizada en el sitio i se complete alrededor de la fecha contratada. Use las operaciones de unión, intersección y complementación para describir cada uno de los siguientes eventos en función de A_1, A_2 y A_3, trace un diagrama de Venn y sombree la región que corresponde a cada uno.

a. Por lo menos una planta se completa alrededor de la fecha contratada.

b. Todas las plantas se completan alrededor de la fecha contratada.

c. Sólo la planta localizada en el sitio 1 se completa alrededor de la fecha contratada.

d. Exactamente una planta se completa alrededor de la fecha contratada.

e. La planta localizada en el sitio 1 o las otras dos plantas se completan alrededor de la fecha contratada.

9. Use diagramas de Venn para verificar las dos siguientes relaciones para los eventos A y B (éstas se conocen como leyes de De Morgan):

a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

[*Sugerencia:* en cada inciso dibuje un diagrama que corresponda al lado derecho y otro al izquierdo.]

10. **a.** En el ejemplo 2.10, identifique tres eventos que sean mutuamente exclusivos.

b. Suponga que no hay resultado común a los tres eventos A, B y C. ¿Son estos tres eventos mutuamente exclusivos por necesidad? Si su respuesta es sí, explique por qué; si su respuesta es no, dé un contraejemplo valiéndose del experimento del ejemplo 2.10.

2.2 Axiomas, interpretaciones, y propiedades de la probabilidad

Dados un experimento y un espacio muestral $\mathcal{S}$, *el objetivo de la probabilidad es asignar a cada evento A un número P(A), llamado la probabilidad del evento A, el cual dará una medida precisa de la oportunidad de que A ocurrirá*. Para garantizar que las asignaciones

serán consistentes con las nociones intuitivas de la probabilidad, todas las asignaciones deberán satisfacer los siguientes axiomas (propiedades básicas) de probabilidad.

AXIOMA 1 Para cualquier evento A, $P(A) \geq 0$.

AXIOMA 2 $P(\mathcal{S}) = 1$.

AXIOMA 3 Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es un conjunto de eventos disjuntos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Se podría preguntar por qué el tercer axioma no contiene ninguna referencia a un conjunto *finito* de eventos disjuntos. Es porque la propiedad correspondiente para un conjunto finito puede ser derivada de los tres axiomas. Se pretende que la lista de axiomas sea tan corta como sea posible y que no contenga alguna propiedad que pueda ser derivada de las demás que aparecen en la lista. El axioma 1 refleja la noción intuitiva de que la probabilidad de que ocurra A deberá ser no negativa. El espacio muestral es por definición el evento que debe ocurrir cuando se realiza el experimento ($\mathcal{S}$ contiene todos los posibles resultados), así que el axioma 2 dice que la máxima probabilidad posible de 1 está asignada a $\mathcal{S}$. El tercer axioma formaliza la idea que si se desea la probabilidad de que por lo menos uno de varios eventos ocurrirá y dado que dos eventos no pueden ocurrir al mismo tiempo, entonces la probabilidad de que por lo menos uno ocurra es la suma de las probabilidades de los eventos individuales.

PROPOSICIÓN $P(\varnothing) = 0$ donde $\varnothing$ es el evento nulo (el evento que no contiene resultados en absoluto). Esto a su vez implica que la propiedad contenida en el axioma 3 es válida para un conjunto *finito* de eventos disjuntos.

Comprobación Primero considérese el conjunto infinito $A_1 = \varnothing, A_2 = \varnothing, A_3 = \varnothing, \ldots$ Como $\varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, los eventos en este conjunto están disjuntos y $\bigcup A_i = \varnothing$. El tercer axioma da entonces

$$P(\varnothing) = \sum P(\varnothing)$$

Esto puede suceder sólo si $P(\varnothing) = 0$.

Ahora supóngase que $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son eventos disjuntos y anéxese a éstos el conjunto infinito $A_{k+1} = \varnothing, A_{k+2} = \varnothing, A_{k+3} = \varnothing, \ldots$. Si de nuevo se invoca el tercer axioma,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

como se deseaba. ■

Ejemplo 2.11 Considere lanzar una tachuela al aire. Cuando se detiene en el suelo, su punta estará hacia arriba (el resultado U) o hacia abajo (el resultado D). El espacio muestral de este evento es por consiguiente $\mathcal{S} = \{U, D\}$. Los axiomas especifican $P(\mathcal{S}) = 1$, por lo que la asignación de probabilidad se completará determinando $P(U)$ y $P(D)$. Como U y D están disjuntos y su unión es $\mathcal{S}$, la siguiente proposición implica que

$$1 = P(\mathcal{S}) = P(U) + P(D)$$

Se deduce que $P(D) = 1 - P(U)$. Una posible asignación de probabilidades es $P(U) = .5$, $P(D) = .5$, mientras que otra posible asignación es $P(U) = .75$, $P(D) = .25$. De hecho, si p representa cualquier número fijo entre 0 y 1, $P(U) = p$, $P(D) = 1 - p$ es una asignación compatible con los axiomas. ■

Ejemplo 2.12 Considere probar las baterías que salen de la línea de ensamble una por una hasta que se encuentra una con el voltaje dentro de los límites prescritos. Los eventos simples son $E_1 = \{S\}$, $E_2 = \{FS\}$, $E_3 = \{FFS\}$, $E_4 = \{FFFS\}$, ... Suponga que la probabilidad de que cualquier batería resulte satisfactoria es de .99. Entonces se puede demostrar que $P(E_1) = .99$, $P(E_2) = (.01)(.99)$, $P(E_3) = (.01)^2(.99)$, . . . es una asignación de probabilidades a los eventos simples que satisface los axiomas. En particular, como los E_i son disjuntos y $\mathcal{S} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots$, debe ser el caso que

$$\begin{aligned} 1 &= P(\mathcal{S}) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \cdots \\ &= .99[1 + .01 + (.01)^2 + (.01)^3 + \cdots] \end{aligned}$$

Aquí se utilizó la fórmula para la suma de una serie geométrica:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1 - r}$$

Sin embargo, otra asignación de probabilidad legítima (de acuerdo con los axiomas) del mismo tipo "geométrico" se obtiene reemplazando .99 por cualquier otro número p entre 0 y 1 (y .01 por $1 - p$). ■

Interpretación de probabilidad

Los ejemplos 2.11 y 2.12 muestran que los axiomas no determinan por completo una asignación de probabilidades a eventos. Los axiomas sirven sólo para excluir las asignaciones incompatibles con las nociones intuitivas de probabilidad. En el experimento de lanzar al aire tachuelas del ejemplo 2.11, se sugirieron dos asignaciones particulares. La asignación apropiada o correcta depende de la naturaleza de la tachuela y también de la interpretación de probabilidad. La interpretación que más frecuentemente se utiliza y es más fácil de entender está basada en la noción de frecuencias relativas.

Considérese un experimento que pueda ser realizado repetidamente de una manera idéntica e independiente, y sea A un evento que consiste en un conjunto fijo de resultados del experimento. Ejemplos simples de experimentos repetibles incluyen el lanzamiento al aire de tachuelas y dados previamente discutido. Si el experimento se realiza n veces, en algunas de las réplicas el evento A ocurrirá (el resultado estará en el conjunto A) y en otras, A no ocurrirá. Denote con $n(A)$ el número de réplicas en las cuales A sí ocurre. Entonces la relación $n(A)/n$ se conoce como la *frecuencia relativa* de ocurrencia del evento A en la secuencia de n réplicas.

Por ejemplo, sea A el evento de que un paquete enviado dentro del estado de California para entrega en un segundo día en realidad llega en un día. Los resultados de enviar 10 paquetes de este tipo (las primeras 10 repeticiones) son los siguientes:

Paquete #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
¿A ocurre?	N	S	S	S	N	N	S	S	N	N
Frecuencia relativa de A	0	.5	.667	.75	.6	.5	.571	.625	.556	.5

La figura 2.2(a) muestra cómo la frecuencia relativa $n(A)/n$ fluctúa sustancialmente en el curso de las primeras 50 repeticiones. Pero como el número de repeticiones sigue aumentando, la figura 2.2(b) ilustra cómo la frecuencia relativa se estabiliza.

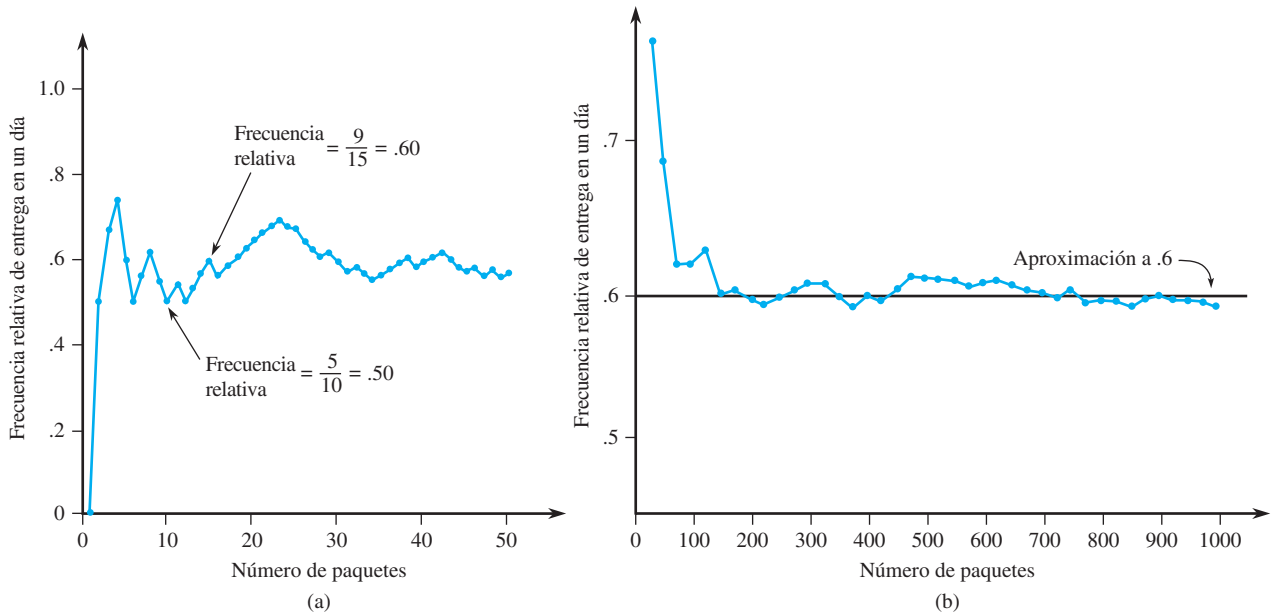


Figura 2.2 Comportamiento de la frecuencia relativa (a) fluctuación inicial (b) estabilización a largo plazo.

En términos más generales, la evidencia empírica, con base en los resultados de muchos experimentos repetibles, indica que cualquier frecuencia relativa de este tipo se estabilizará conforme el número de repeticiones n aumenta. Es decir, como n se hace arbitrariamente grande, $n(A)/n$ se aproxima a un valor límite al que se denomina *límite* (o *largo plazo*) *de la frecuencia relativa* del evento A. La *interpretación objetiva de probabilidad* identifica esta frecuencia límite en relación con $P(A)$. Supóngase que las probabilidades se asignan a los acontecimientos de acuerdo con su límite de frecuencias relativas. A continuación, una afirmación como "la probabilidad de un paquete se entregue en un día de envío es .6" significa que de un gran número de paquetes enviados por correo, aproximadamente el 60% llegará en un día. Del mismo modo, si B es el evento de que un tipo particular de aparato necesitará servicio mientras la garantía es válida, entonces $P(B) = .1$ se interpreta en el sentido de que en el largo plazo, el 10% de estos aparatos necesitará un servicio de garantía. Esto no quiere decir que exactamente uno de cada 10 necesitará servicio o que exactamente 10 de cada 100 necesitarán servicio, ya que 10 y 100 no son a largo plazo.

Se dice que esta interpretación de frecuencia relativa de probabilidad es objetiva porque se apoya en una propiedad del experimento y no en algún individuo particular interesado en el experimento. Por ejemplo, dos observadores diferentes de una secuencia de lanzamiento de una moneda deberán utilizar la misma asignación de probabilidad puesto que los observadores no tienen nada que ver con la frecuencia relativa límite. En la práctica, la interpretación no es tan objetiva como pudiera parecer, puesto que la frecuencia relativa límite de un evento no será conocida. Por tanto, se tendrán que asignar probabilidades con base en creencias sobre la frecuencia relativa límite de eventos en estudio. Afortunadamente, existen muchos experimentos para los cuales habrá consenso con respecto a asignaciones de probabilidad. Cuando se habla de una moneda imparcial, significa $P(A) = P(S) = .5$ y un dado imparcial es uno para el cual las frecuencias relativas limitativas de los seis resultados son $\frac{1}{6}$, lo que sugiere las asignaciones de probabilidad $P(\{1\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$.

Como la interpretación objetiva de probabilidad está basada en la noción de frecuencia limitativa, su aplicabilidad está limitada a situaciones experimentales repetibles. No obstante, el lenguaje de probabilidad a menudo se utiliza en conexión con situaciones

que son inherentemente irrepetibles. Algunos ejemplos incluyen: "Las probabilidades de un tratado de paz son buenas"; "es probable que el contrato le sea otorgado a nuestra compañía"; y "como su mejor mariscal de campo está lesionado, espero que no anoten más de 10 puntos contra nosotros". En tales situaciones se desearía, como antes, asignar probabilidades numéricas a varios resultados y eventos (p. ej., la probabilidad es .9 de que obtendremos el contrato). Por consiguiente se debe adoptar una interpretación alternativa de estas probabilidades. Como diferentes observadores pueden tener información y opiniones previas con respecto a tales situaciones experimentales, las asignaciones de probabilidad ahora pueden diferir de un individuo a otro. Las interpretaciones en tales situaciones se conocen por lo tanto como *subjetivas*. El libro de Robert Winkler citado en las referencias del capítulo da un recuento muy fácil de leer de varias interpretaciones subjetivas.

Más propiedades de probabilidad

PROPOSICIÓN

Para cualquier evento A, $P(A) + P(A') = 1$, a partir de la cual $P(A) = 1 - P(A')$.

Comprobación En el axioma 3, sea $k = 2$, $A_1 = A$ y $A_2 = A'$. Como por la definición de A', $A \cup A' = \mathcal{S}$ en tanto A y A' sean eventos disjuntos, $1 = P(\mathcal{S}) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$. ■

Esta proposición es sorprendentemente útil porque se presentan muchas situaciones en las cuales $P(A')$ es más fácil de obtener mediante métodos directos que $P(A)$.

Ejemplo 2.13 Considere un sistema de cinco componentes idénticos conectados en serie, como se ilustra en la figura 2.3.

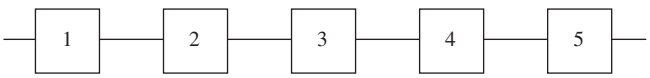


Figura 2.3 Sistema de cinco componentes conectados en serie

Denote un componente que falla por F y uno que no lo hace por S. Sea A el evento en que el *sistema* falla. Para que ocurra A, por lo menos uno de los componentes individuales debe fallar. Los resultados en A incluyen $SSFSS$ (1, 2, 4 y 5 funcionarán, pero 3 no), $FFSSS$, y así sucesivamente. Existen de hecho 31 resultados diferentes en A. Sin embargo, A', el evento en que el sistema funciona, consiste en el resultado único $SSSSS$. En la sección 2.5 se verá que si 90% de todos estos componentes no fallan y diferentes componentes fallan independientemente uno de otro, entonces $P(A') = P(SSSSS) = .9^5 = .59$. Así pues, $P(A) = 1 - .59 = .41$; por lo tanto, entre un gran número de sistemas como ése, aproximadamente 41% fallarán. ■

En general, la proposición anterior es útil cuando el evento de interés puede ser expresado como "por lo menos . . . ," puesto que en ese caso puede ser más fácil trabajar con el complemento "menos que . . ." (en algunos problemas es más fácil trabajar con "más que . . ." que con "cuando mucho . . ."). Cuando se tenga dificultad al calcular $P(A)$ directamente, habrá que pensar en determinar $P(A')$.

PROPOSICIÓN

Para cualquier evento A, $P(A) \leq 1$.

Esto se debe a que $1 = P(A) + P(A') \geq P(A)$ puesto que $P(A') \geq 0$.

Cuando los eventos A y B son mutuamente exclusivos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Para eventos que no son mutuamente exclusivos, la adición de $P(A)$ y $P(B)$ da por resultado un "doble conteo" de los resultados en la intersección. El siguiente resultado muestra cómo corregir esto.

PROPOSICIÓN

Para dos eventos cualesquiera A y B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Comprobación Obsérvese primero que $A \cup B$ puede ser descompuesto en dos eventos *excluyentes*, A y $B \cap A'$; la última es la parte de B que queda afuera de A (ver figura 2.4). Además, B por sí mismo es la unión de los dos eventos excluyentes $A \cap B$ y $A' \cap B$, por lo tanto $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$. Así

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A') &= P(A) + [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

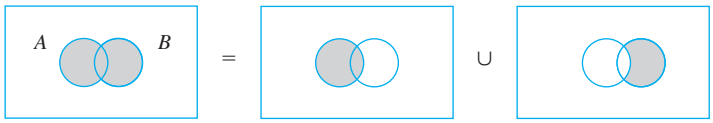


Figura 2.4 Representación de A ∪ B como la unión de dos eventos excluyentes ■

Ejemplo 2.14 En cierto suburbio residencial, 60% de las familias se suscriben al servicio de internet de la compañía de televisión por cable, 80% lo hacen al servicio de televisión de esa compañía y 50% de todas las familias a ambos servicios. Si se elige una familia al azar, ¿cuál es la probabilidad de que contrate por lo menos uno de estos dos servicios de la empresa, y cuál es la probabilidad de contratar exactamente uno de estos servicios de la empresa?

Con $A = \{$se suscribe al servicio de internet$\}$ y $B = \{$se suscribe al servicio de televisión por cable$\}$, la información dada implica que $P(A) = .6$, $P(B) = .8$ y $P(A \cap B) = .5$. La proposición precedente ahora lleva a

$P($se suscribe a por lo menos uno de los dos servicios$)$

$$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = .6 + .8 - .5 = .9$$

El evento de que una familia se suscribe sólo al servicio de televisión por cable se escribe como $A' \cap B$ [(no internet) y televisión]. Ahora la figura 2.4 implica que

$$.9 = P(A \cup B) = P(A) + P(A' \cap B) = .6 + P(A' \cap B)$$

a partir de la cual $P(A' \cap B) = .3$. Asimismo, $P(A \cap B') = P(A \cup B) - P(B) = .1$. Todo esto se ilustra en la figura 2.5, donde se ve que

$$P(\text{exactamente uno}) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) = .1 + .3 = .4$$

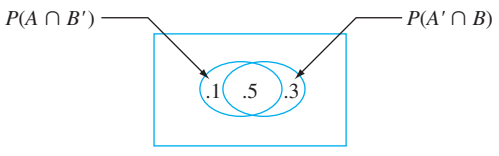


Figura 2.5 Probabilidades para el ejemplo 2.14 ■

La probabilidad de una unión de más de dos eventos se calcula en forma análoga.

Para tres eventos cualesquiera A, B y C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Esto se puede verificar examinando un diagrama de Venn de $A \cup B \cup C$, el cual se muestra en la figura 2.6. Cuando $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$ se agregan, ciertas intersecciones se cuentan dos veces, por lo que deben ser restadas, pero esto hace que $P(A \cap B \cap C)$ se reste una vez con demasiada frecuencia.

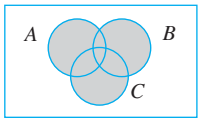


Figura 2.6 $A \cup B \cup C$

Determinación sistemática de probabilidades

Considérese un espacio muestral que es o finito o "contablemente infinito" (lo segundo significa que los resultados pueden ser puestos en lista en una secuencia infinita, por lo que existe un primer resultado, un segundo, un tercero, y así sucesivamente, por ejemplo, el escenario de prueba de baterías del ejemplo 2.12). Denote con $E_1, E_2, E_3, \ldots$ los eventos simples correspondientes, cada uno compuesto de un solo resultado. Una estrategia sensible para el cálculo de probabilidad es determinar primero cada probabilidad del evento simple, con el requerimiento de que $\sum P(E_i) = 1$. Entonces la probabilidad de cualquier evento compuesto A se calcula agregando los $P(E_i)$ para todos los E_i que existen en A:

$$P(A) = \sum_{\text{todos los } E_i \text{ en } A} P(E_i)$$

Ejemplo 2.15 Durante las horas no pico el tren que viaja entre los suburbios y la ciudad utiliza cinco carros. Suponga que existe el doble de probabilidades de que un usuario seleccione el carro intermedio (#3) que cualquier carro adyacente (#2 o #4) y el doble de probabilidades de que seleccione cualquier carro adyacente que cualquier carro extremo (#1 o #5). Sea $p_i = P(\text{carro } i \text{ es seleccionado}) = P(E_i)$. Entonces se tiene $p_3 = 2p_2 = 2p_4$ y $p_2 = 2p_1 = 2p_5 = p_4$. Esto da

$$1 = \sum P(E_i) = p_1 + 2p_1 + 4p_1 + 2p_1 + p_1 = 10p_1$$

es decir, $p_1 = p_5 = .1$, $p_2 = p_4 = .2$, $p_3 = .4$. La probabilidad de que uno de los tres carros intermedios se seleccione (un evento compuesto) es entonces $p_2 + p_3 + p_4 = .8$. ■

Resultados igualmente probables

En muchos experimentos compuestos de N resultados, es razonable asignar probabilidades iguales a todos los N eventos simples. Esto incluye ejemplos tan obvios como lanzar al aire una moneda o un dado imparciales una o dos veces (o cualquier número fijo de veces) o seleccionar una o varias cartas de un mazo bien barajado de 52 cartas. Con $p = P(E_i)$ por cada i,

$$1 = \sum_{i=1}^{N} P(E_i) = \sum_{i=1}^{N} p = p \cdot N \text{ por lo tanto } p = \frac{1}{N}$$

Es decir, si existen N resultados igualmente probables, la probabilidad de cada uno es $1/N$.

Ahora considérese un evento A, con $N(A)$ como el número de resultados contenidos en A. Entonces

$$P(A) = \sum_{E_i \text{ en } A} P(E_i) = \sum_{E_i \text{ en } A} \frac{1}{N} = \frac{N(A)}{N}$$

Por lo tanto, cuando los resultados son igualmente probables, el cálculo de probabilidades se reduce a contar: determinar tanto el número de resultados $N(A)$ en A como el número de resultados N en $\mathcal{S}$ y formar su cociente.

Ejemplo 2.16 Usted tiene seis libros de misterios sin leer y seis de ciencia ficción sin leer en su biblioteca. Los tres primeros de cada tipo son de tapa dura y los tres últimos son de bolsillo. Considere la posibilidad de seleccionar al azar uno de los seis misterios y luego seleccionar al azar uno de los seis libros de ciencia ficción para tomar unas vacaciones en Acapulco (después de todo, necesita algo para leer en la playa). Numera los de misterio 1, 2, . . . , 6, y hace lo mismo con los libros de ciencia ficción. A continuación, cada resultado es un par de números, tales como (4, 1) y hay $N = 36$ resultados posibles (para una representación visual de esta situación, consulte la tabla en el ejemplo 2.3 y elimine la primera fila y columna). Con la selección al azar como se ha descrito, los 36 resultados son igualmente probables. Nueve de estos resultados son tales que los libros seleccionados son libros de bolsillo (aquellos en la esquina inferior derecha de la tabla de referencia): (4, 4), (4, 5), . . . , (6, 6). Así que la probabilidad del evento A de que ambos libros seleccionados sean libros de bolsillo es

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{9}{36} = .25$$ ■

EJERCICIOS Sección 2.2 (11–28)

11. Una compañía de fondos de inversión mutua ofrece a sus clientes varios fondos diferentes: un fondo de mercado de dinero, tres fondos de bonos (a corto, intermedio y largo plazos), dos fondos de acciones (de moderado y alto riesgo) y un fondo balanceado. Entre los clientes que poseen acciones en un solo fondo, los porcentajes de clientes en los diferentes fondos son como sigue:

Mercado de dinero	20%	Acciones de alto riesgo	18%
Bonos a corto plazo	15%	Acciones de riesgo moderado	25%
Bonos a plazo intermedio	10%	Balanceadas	7%
Bonos a largo plazo	5%		

Se selecciona al azar un cliente que posee acciones en sólo un fondo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo seleccionado posea acciones en el fondo balanceado?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo posea acciones en un fondo de bonos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo seleccionado no posea acciones en un fondo de acciones?

12. Considere seleccionar al azar un estudiante en cierta universidad y que A denote el evento en que el individuo seleccionado tenga una tarjeta de crédito Visa y que B sea el evento análogo para la tarjeta MasterCard. Suponga que $P(A) = .5$, $P(B) = .4$, y $P(A \cap B) = .25$.

a. Calcule la probabilidad de que el individuo seleccionado tenga por lo menos uno de los dos tipos de tarjetas (es decir, la probabilidad del evento $A \cup B$).
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo seleccionado no tenga ningún tipo de tarjeta?
c. Describa, en función de A y B, el evento de que el estudiante seleccionado tenga una tarjeta Visa pero no una MasterCard y luego calcule la probabilidad de este evento.

13. Una firma consultora de computación presentó propuestas en tres proyectos. Sea $A_i = \{\text{proyecto otorgado } i\}$, con $i = 1, 2, 3$ y suponga que $P(A_1) = .22$, $P(A_2) = .25$, $P(A_3) = .28$, $P(A_1 \cap A_2) = .11$, $P(A_1 \cap A_3) = .05$, $P(A_2 \cap A_3) = .07$, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = .01$. Exprese en palabras cada uno de los siguientes eventos y calcule la probabilidad de cada uno:

a. $A_1 \cup A_2$
b. $A_1' \cap A_2'$ [*Sugerencia:* $(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2'$]
c. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ **d.** $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$
e. $A_1' \cap A_2' \cap A_3$ **f.** $(A_1' \cap A_2') \cup A_3$

14. Suponga que el 55% de los adultos consumen regularmente café, el 45% consumen regularmente refrescos con gas y el 70% consumen regularmente al menos uno de estos dos productos.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un adulto al azar regularmente consuma café y soda?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que un adulto al azar no consuma regularmente al menos uno de estos dos productos?

15. Considere el tipo de secadora de ropa (de gas o eléctrica) adquirida por cada uno de cinco clientes diferentes en cierta tienda.
a. Si la probabilidad de que a lo sumo uno de éstos adquiera una secadora eléctrica es .428, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos adquieran una secadora eléctrica?
b. Si P(los cinco compran una secadora de gas) = .116 y P(los cinco compran una secadora eléctrica) = .005, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos se adquiera una secadora de cada tipo?

16. A un individuo se le presentan tres vasos diferentes de refresco de cola, designados C, D y P. Se le pide que pruebe los tres y que los ponga en lista en orden de preferencia. Suponga que se sirvió el mismo refresco de cola en los tres vasos.
a. ¿Cuáles son los eventos simples en este evento de clasificación y qué probabilidad le asignaría a cada uno?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que C obtenga el primer lugar?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que C obtenga el primer lugar y D el último?

17. Denote con A el evento en que la siguiente solicitud de asesoría de un consultor de software estadístico tenga que ver con el paquete SPSS y que B denote el evento en que la siguiente solicitud de ayuda tiene que ver con SAS. Suponga que $P(A) = .30$ y $P(B) = .50$.
a. ¿Por qué no es el caso que $P(A) + P(B) = 1$?
b. Calcule $P(A')$.
c. Calcule $P(A \cup B)$.
d. Calcule $P(A' \cap B')$.

18. Una caja contiene seis focos de 40 W, cinco de 60 W y cuatro de 75 W. Si los focos se eligen uno por uno en orden aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos focos deban ser seleccionados para obtener uno de 75 W?

19. La inspección visual humana de uniones soldadas en un circuito impreso puede ser muy subjetiva. Una parte del problema se deriva de los numerosos tipos de defectos de soldadura (p. ej., almohadilla seca, visibilidad en escuadra, picaduras) e incluso el grado al cual una unión posee uno o más de estos defectos. Por consiguiente, incluso inspectores altamente entrenados pueden discrepar en cuanto a la disposición particular de una unión particular. En un lote de 10,000 uniones, el inspector A encontró 724 defectuosas, el inspector B 751 y 1159 de las uniones fueron consideradas defectuosas por cuando menos uno de los inspectores. Suponga que se selecciona una de las 10,000 uniones al azar.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que la unión seleccionada no sea juzgada defectuosa por ninguno de los dos inspectores?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la unión seleccionada sea juzgada defectuosa por el inspector B pero no por el inspector A?

20. Cierta fábrica utiliza tres turnos diferentes. Durante el año pasado, ocurrieron 200 accidentes en la fábrica. Algunos de ellos pueden ser atribuidos por lo menos en parte a condiciones de trabajo inseguras mientras que las otras no se relacionan con las condiciones de trabajo. La tabla adjunta da el porcentaje de accidentes que ocurren en cada tipo de categoría de accidente–turno.

		Condiciones inseguras	No vinculados a las condiciones
Turno	*Diurno*	10%	35%
	Mixto	8%	20%
	Nocturno	5%	22%

Suponga que uno de los 200 reportes de accidente se selecciona al azar de un archivo de reportes y que el turno y el tipo de accidente se determinan.
a. ¿Cuáles son los eventos simples?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente seleccionado se atribuya a condiciones inseguras?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el accidente seleccionado no haya ocurrido en el turno de día?

21. Una compañía de seguros ofrece cuatro diferentes niveles de deducible, ninguno, bajo, medio y alto, para sus tenedores de pólizas de propietario de casa y tres diferentes niveles, bajo, medio y alto, para sus tenedores de pólizas de automóviles. La tabla adjunta da proporciones de las varias categorías de tenedores de pólizas que tienen ambos tipos de seguro. Por ejemplo, la proporción de individuos con deducible bajo de casa y deducible bajo de automóvil es .06 (6% de todos los individuos).

	Propietarios de viviendas			
Auto	**N**	**B**	**M**	**A**
B	.04	.06	.05	.03
M	.07	.10	.20	.10
A	.02	.03	.15	.15

Suponga que se elige al azar un individuo que posee ambos tipos de pólizas.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo tenga un deducible de auto medio y un deducible de casa alto?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo tenga un deducible de casa bajo y un deducible de auto bajo?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo se encuentre en la misma categoría de deducibles de casa y auto?
d. Basado en su respuesta en el inciso (c), ¿cuál es la probabilidad de que las dos categorías sean diferentes?
e. ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo tenga por lo menos un nivel deducible bajo?
f. Utilizando la respuesta del inciso (e), ¿cuál es la probabilidad de que ningún nivel deducible sea bajo?

22. La ruta utilizada por un automovilista para trasladarse a su trabajo contiene dos intersecciones con señales de tránsito. La probabilidad de que tenga que detenerse en la primera señal es .4, la probabilidad análoga para la segunda señal es .5 y la probabilidad de que tenga que detenerse en por lo menos una de las dos señales es .6. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que detenerse
a. ¿En ambas señales?

Este texto líder en el mercado ofrece una amplia introducción a la probabilidad y la estadística para estudiantes de ingeniería y ciencias en todas las especialidades. Demostrado, preciso y alabado por sus excelentes ejemplos, ***Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*** evidencia la reputación de Jay Devore como un autor destacado y líder en la comunidad académica. Devore hace hincapié en los conceptos, modelos, metodología y aplicaciones en comparación con el desarrollo matemático riguroso y derivaciones. Ayudado por sus ejemplos vivos y realistas, los estudiantes van más allá de simplemente aprender acerca de las estadísticas, conociendo también cómo poner los métodos estadísticos en uso.

Características

- Más de 40 nuevos ejemplos y 100 nuevos problemas han sido investigados y escritos cuidadosamente con los datos reales más actuales.
- El Capítulo 1, "Generalidades y estadística descriptiva", contiene una nueva subsección sobre "El ámbito de la estadística moderna" que describe y ejemplifica cómo la estadística se utiliza en las disciplinas modernas.
- Se ha revisado y simplificado considerablemente el capítulo 8, "Pruebas de hipótesis basadas en una sola muestra", también tiene un nuevo apartado titulado "Más sobre interpretación de los valores *P*".
- Siempre que sea posible, en todo el libro el idioma se ha reforzado y simplificado para mejorar la claridad.

ISBN-13: 978-607481619-8
ISBN-10: 607481619-0

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com